



ILMIAH

JURNAL ILMU PENGETAHUAN TEKNOLOGI DAN SENI

Volume XI No. 3

Mei - Agustus 2019

ISSN: 1979-0759

❖ Debby Marthalia. Pengaruh Strategi <i>React</i> terhadap Kemampuan Berpikir Kritis Matematis Siswa SMP Negeri 5 Palembang	1
❖ Deddy Hendarwan. Arti Penting Pendidikan Anti Korupsi dalam Pembentukan Karakter serta Pencegahan Tindak Pidana Korupsi	10
❖ Fransisca Uly Marshinta, Silvana Oktanisa, Ibnu Maja. Persepsi Mahasiswa terhadap Pembelajaran Edmodo	21
❖ Ibnu Maja. Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen dengan Nilai Eigen dan Vektor Eigen dan Metode Koefisien Tak Tentu	31
❖ Liza Utama. Pentingnya Memahami Pancasila sebagai Ideologi Terbuka	36
❖ Sri Winarni. Analisis Kinerja Keuangan Menggunakan Metode <i>Du Pont System</i> pada Perusahaan Agrikultur Sub Sektor Perkebunan yang Tergolong Saham Syariah di Bursa Efek Indonesia Periode 2016-2018	43
❖ Suroso, Welly Ardiansyah, Farida Husin. Pendidikan Bela Negara pada Masa Rasulullah	55

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN PADA MASYARAKAT
POLITEKNIK DARUSSALAM – PALEMBANG

ISSN : 1979 – 0759

Volume XI. No. 3, Mei – Agustus 2019

Jurnal Ilmu Pengetahuan Teknologi dan Seni

Terbit secara periodik 3 (tiga) kali setahun pada bulan September, Januari dan Mei

Pelindung : Direktur Politeknik Darussalam

Pengarah : Pembantu Direktur I

Pemimpin Umum/ Penanggung Jawab:
Ketua : Kepala LPPM Politeknik Darussalam

Pimpinan Redaksi : Sri Porwani, S.E., M. Si.

Bendahara : Ylke Diana Putri, S.E., Ak.

Dewan Redaksi :

1. Dr. H. Suberiyatmono, S.E., M.M., Ak.
(STIE Prasetya Mandiri Lampung)
2. Rita Martini, S.E., Ak., M.Si. (Politeknik Negeri Sriwijaya)
3. Sri Porwani, S.E., M.Si (Politeknik Darussalam)
4. A. Jalaludin Sayuti, S.E., M. Hum, Res (Politeknik Negeri Sriwijaya)
5. Sri Winarni, S.E., M. Si. (Politeknik Darussalam)
6. Ariya Agustini, S.Pd., M.Pd (Politeknik Darussalam)

Tata Usaha Bidang Sirkulasi/Produksi : Widya Destina, A.Md



KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas Rahmat-Nya sehingga Jurnal ILMIAH (Jurnal Ilmu Pengetahuan Teknologi dan Seni) Volume XI No. 3 Periode Mei – Agustus Tahun 2019 ini dapat terbit.

Salah satu bentuk karya ilmiah yaitu penulisan karya ilmiah berupa Jurnal Ilmu Pengetahuan Teknologi & Seni. Dimana penulisan karya ilmiah merupakan suatu kewajiban yang dilakukan oleh Dosen yang mana ini salah satu kegiatan Tri Dharma Perguruan Tinggi.

Tim penyunting menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang terkait dalam penyusunan jurnal ini. Jurnal ini juga masih banyak kekurangannya, untuk itu saran dan kritik yang membangun dari para pembaca sangat diharapkan agar jurnal ini lebih sempurna dimasa yang akan datang.

Akhir kata, Tim Penyunting berharap semoga jurnal ini dapat bermanfaat bagi seluruh pembaca.

Tim Penyunting

Redaksi menerima tulisan hasil penelitian atau kajian ilmiah yang berhubungan dengan ipteks, ekonomi dan bisnis serta pendidikan yang belum pernah dimuat pada majalah atau jurnal lain. Redaksi berhak mengubah naskah tanpa mengurangi makna isinya. Isi tulisan merupakan tanggungjawab penulis. Keaslian tulisan adalah hasil tulisan sendiri (bebas unsur plagiatisme yang dibuat oleh penulis. Apabila di kemudian terbukti pada tulisan ini mengandung unsur plagiatisme dari hasil karya/ tulisan orang lain dan atau terdapat gugatan dari pihak lain terhadap tulisan ini merupakan tanggung jawab sepenuhnya penulis. Segala dampak dari plagiatisme tidak ada sangkutpautnya dengan Dewan Redaksi Jurnal Ilmu Pengetahuan Teknologi dan Seni LPPM Politeknik Darussalam.

Alamat Redaksi:

- Kampus Politeknik Darussalam
- Jalan Basuki Rahmat No. 1608 E-F Simpang Polda Palembang Telp. (0711) 350 333 / Fax. (0711) 374 002 / 374 003
- E-Mail: pdpalembang@yahoo.co.id
- Contact Person: Widya Destina, A.Md (0812-7890-7371)

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFFERENSIAL LINEAR TAK HOMOGEN DENGAN NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN DAN METODE KOEFISIEN TAK TENTU

Ibnu Maja

Dosen UIR MPR Politeknik Negeri Sriwijaya
Email : ibnumaja76@yahoo.co.id

ABSTRACT

The Solutions of the systems of homogeneous linear differential equations can be solved not by the method of indeterminate coefficients. Steps to determine the completion of inhomogeneous systems of differential equations by finding the eigenvalues and eigenvectors and the coefficients of indeterminate begins by writing systems of differential equations in the form of a matrix $y' = Ay + F(x)$ with B is the coefficient matrix of order $n \times n$ and $F(x)$ is not homogeneous matrix function of the system. Followed by determining the determinant of the coefficient matrix B, determine the homogeneous solution of the system $y' = Ay$ namely: $y_h = c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 x}$ with λ and v the values and eigenvectors of the matrix B, looking for a special solution of the function is $F(x)$ $n+1$ of homogeneous by seeing and matching the shape of the function $F(x)$ with the form available from homogeneous solution, then select the example y_p the shape according to the form $F(x)$ after it substitution y_p into the system of equations to find $y' = Ay + F(x)$ the coefficients of y_p the obtained general solution of linear differential equation system that is not homogeneous $y = y_h + y_p$.

Keywords : Homogeneous Linear Differential Equations, Eigenvalues and Eigenvectors.

ABSTRAK

Solusi dari sistem persamaan diferensial linear tak homogen dapat diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu. Langkah-langkah untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan diferensial tak homogen dengan mencari nilai eigen dan vektor eigen dan koefisien tak tentu dimulai dengan menuliskan sistem persamaan diferensial dalam bentuk matriks $y' = Ay + F(x)$ dengan B merupakan matriks koefisien berorde $n \times n$ dan $F(x)$ merupakan matriks fungsi tak homogen dari sistem tersebut. Dilanjutkan dengan menentukan determinan dari matriks koefisien B, menentukan solusi homogen dari sistem $y' = Ay$ yaitu: $y_h = c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 x}$ dengan λ dan v merupakan nilai dan vektor eigen dari matriks B, mencari solusi khusus dari fungsi tak homogen $F(x)$ dengan cara melihat dan mencocokkan bentuk fungsi $F(x)$ dengan bentuk yang tersedia dari solusi homogen, kemudian pilih permasalahan y_p yang bentuknya sesuai dengan bentuk $F(x)$ setelah itu substitusikan y_p kedalam sistem persamaan $y' = Ay + F(x)$ untuk mencari koefisien-koefisien dari y_p maka diperoleh solusi umum dari sistem persamaan diferensial linear tak homogen yaitu $y = y_h + y_p$.

Kata Kunci : Persamaan Diferensial Linier Tak Homogen, Nilai Eigen dan Vektor Eigen

1. LATAR BELAKANG

Bentuk umum Persamaan Diferensial (PD) Linear orde- n adalah:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

Dengan $a_0, a_1, \dots, a_n$ dan $F(x)$ adalah fungsi-fungsi dari variabel bebas x , $a_n \neq 0$ dan $F(x) \neq 0$

merupakan bentuk umum dari persamaan diferensial linier tak homogen serta

a. Jika $g(x) = 0$ maka persamaan tersebut homogen

b. Jika $g(x) \neq 0$ maka persamaan tersebut tak homogen

c. Jika seluruh koefisien $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah konstanta, maka persamaan tersebut dikatakan memiliki koefisien konstan.

Solusi dari sistem persamaan diferensial linear tak homogen ini dapat dicari dengan menggunakan suatu metode tertentu, salah satu metode yang dapat di gunakan yaitu metode koefisien tak tentu.

Matriks adalah sekumpulan bilangan riil atau kompleks yang disusun menurut baris dan kolom sehingga membentuk jajaran persegi panjang. Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut $m \times n$ atau matriks berordo $m \times n$. Notasi dua indeks : Indeks pertama

menyatakan baris dan indeks kedua menyatakan kolom. (Anton, 2009)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bentuk umum sistem persamaan linier (SPL) yang terdiri dari m buah persamaan dan n buah peubah dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= k_2 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= k_m \end{aligned}$$

Dengan a_{ij} dan k_i merupakan konstanta dan $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

Sistem persamaan linier diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$$

Misalkan A adalah matriks bujursangkar, maka sebuah vektor tak nol dalam dinamakan vektor eigen dari A jika Av adalah kelipatan skalar dari v , yaitu: $Av = \lambda v$ dengan λ adalah skalar. Selanjutnya dinamakan nilai eigen dari A dan v dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan A yang terkait dengan λ . (Anton & Rorres, 2004)

Nilai eigen dan vektor eigen

Penerapan matriks untuk persoalan teknik yang menyangkut gendengan osilasi atau vibrasi, kita jumpai persamaan dalam bentuk : $Ax = \lambda x$ dengan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujursangkar dan λ adalah bilangan (skalar). untuk solusi non-trivial yaitu $x \neq 0$, harga λ yang memenuhi persamaan disebut nilai eigen atau nilai karakteristik dari matriks A dan solusi yang diberikan $Ax = \lambda x$ disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari A .

Bila persamaan diatas dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan yang terpisah kita peroleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Bila ruas kanan dipindahkan ke ruas kiri, persamaannya menjadi :

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned}$$

Agar sistem persamaan linier homogen ini (yaitu semua konstanta diruas kanan sama dengan nol) mempunyai solusi non-trivial maka haruslah : $|A - \lambda I| = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$|A - \lambda I|$ disebut determinan karakteristik dari A dan $|A - \lambda I| = 0$ disebut persamaan karakteristiknya. dengan menjabarkan determinan tersebut akan diperoleh sebuah polinomial berderajat n dan pemecahan persamaan karakteristiknya memberikan harga λ yaitu nilai eigen dari A .

Metode Koefisien Tak Tertentu

Metode ini digunakan untuk menghitung suatu penyelesaian khusus dari persamaan diferensial tak homogen $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = F(x)$ dengan koefisien-koefisien $a, a, a, \dots, a$ merupakan konstanta-konstanta. (Finizio & Ladas, 1988)

Aturan untuk metode koefisien tak tentu:

- Aturan Dasar. Jika $F(x)$ adalah salah satu fungsi yang ada dalam tabel, pilih fungsi y_p yang bersesuaian dan tentukan koefisien tak tentunya dengan mensubstitusikan y_p pada persamaan awal.
- Aturan Modifikasi. Jika $F(x)$ sama dengan solusi persamaan diferensial homogen, kalikan y_p yang bersesuaian dalam tabel dengan x (atau x^2 jika $F(x)$ sama dengan solusi akar kembar persamaan diferensial homogen).
- Aturan Penjumlahan. Jika $F(x)$ adalah jumlah fungsi-fungsi yang terdapat dalam tabel pada kolom pertama, $y_p = a_1 a_1 + b_1$ jumlah fungsi pada baris yang bersesuaian. (Purcell, 2004)

PEMBAHASAN

Sistem Persamaan Diferensial (SPD) Linear Orde satu

Sistem persamaan Diferensial (SPD) linear orde satu dengan n persamaan dan n fungsi tak

diketahui dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + F_1(x)$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + F_2(x)$$

$$\vdots$$

$$y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + F_n(x)$$

Dengan $y_i' = \frac{dy_i}{dx}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$

sistem dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$y' = Ay + F(x) \text{ dengan}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{bmatrix}$$

A merupakan matriks koefisien yang berordo

$n \times n$ jika $F(x) = 0$ maka Sistem dikatakan

SPD homogen, sehingga bentuk matriksnya

adalah $y' = Ay$ selain itu dikatakan SPD tak

homogen. (Goode, 1991)

Studi kasus Solusi SPD Linear Tak Homogen

dengan Metode Koefisien Tak Tentu

Diberikan SPD Linear sebagai berikut :

$$y_1' = 4y_1 + y_3 - x^2$$

$$y_2' = -2y_1 + y_2 - e^{2x}$$

$$y_3' = -2y_1 + y_3 + \sin x$$

Solusi umum yaitu $y = y_h + y_p$

1. Dari ketiga persamaan diubah dalam bentuk

matriks adalah $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan

$$F(x) = \begin{bmatrix} -x^2 \\ -e^{2x} \\ \sin x \end{bmatrix}$$

$$2. \text{Det}(B) = 4(1) + 1(2) = 6$$

3. Solusi homogen dari Sistem persamaan diferensial homogen $y' = By$ dengan

$$y_h = C_1 y_1 e^{t_1 x} + C_2 y_2 e^{t_2 x} + C_3 y_3 e^{t_3 x}$$

mencari nilai dari matriks B adalah

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(\lambda I - B) = 0$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (\lambda-4) & 0 & -1 \\ -2 & (\lambda-1) & 0 \\ -2 & 0 & (\lambda-1) \end{vmatrix} = 0$$

$$\{(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-1) - 1(-2(\lambda-1))\} = 0$$

$$\{\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 - 1(-2\lambda + 2)\} = 0$$

$$\{\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6\} = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks

B adalah:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \text{ dan } \lambda_3 = 3$$

Selanjutnya, mencari vektor eigen setiap masing-masing nilai eigen yang diperoleh yang bersesuaian dengan nilai eigen.

Untuk $\lambda_1 = 1$

$$\begin{vmatrix} (\lambda-4) & 0 & -1 \\ 2 & (\lambda-1) & 0 \\ 2 & 0 & (\lambda-1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Misalkan : $x_1 = t, x_2 = s, x_3 = -3t$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t \\ s \\ -3t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t \\ s \\ 1 \end{vmatrix}$$

Sehingga vektor:

$$v = \begin{vmatrix} t \\ s \\ -3t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ s \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3t \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan

$$\lambda_1 = 1 \text{ yaitu } v_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Untuk $\lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} (\lambda-4) & 0 & -1 \\ 2 & (\lambda-1) & 0 \\ 2 & 0 & (\lambda-1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Misalkan : $-2x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow -2x_1 = x_3$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan

$$\lambda_2 = 2 \text{ yaitu } v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Untuk $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & (\lambda-1) & 0 \\ 2 & 0 & (\lambda-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan

$$-x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow -x_1 = x_3$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -2x_2$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan

$$\lambda_3 = 3 \text{ yaitu } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh solusi homogen dari SPD yaitu:

$$y_h = c_1 v_1 e^{2ix} + c_2 v_2 e^{2ix} + c_3 v_3 e^{3ix}$$

$$y_h = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2ix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2ix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3ix}$$

$$+ c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3ix}$$

Solusi khusus (y_p) dari fungsi tak homogen

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ -e^{2ix} \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$F'(x) = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{2ix} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2ix} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat $F'(x)$ memuat bentuk-bentuk polinomial dan eksponensial, dan $F(x)$ tidak sama dengan solusi homogen dari SPD, sehingga dapat dipilih persamaan $F'(x)$ yaitu:

$$y_p = ax^2 + bx + c + d e^{2ix} + e \cos x$$

$$+ f \sin x$$

Substitusikan y_p pada sistem persamaan diferensial:

$$(y_p)' = A y_p + F(x)$$

$$2ax + b + 2d e^{2ix} - e \sin x + f \cos x = Aax^2 + Abx + Ac + Ad e^{2ix} + Ae \cos x$$

$$+ Af \sin x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^2$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2ix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin x$$

Dari persamaan diatas, untuk menentukan koefisien-koefisien a, b, c, d, e, f sesuai dengan variabelnya, yaitu:

1. koefisien dari x^2 yaitu

$$0 = Aa + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. koefisien dari x yaitu $2a - Ab$

3. koefisien dari e^{2ix} yaitu:

$$2d = Ad + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. koefisien dari $\sin x$ yaitu:

$$-e = Af + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. koefisien dari $\cos x$ yaitu:

$$f = Ac$$

6. koefisien dari konstanta yaitu:

$$b = Ac$$

Dari persamaan diatas diperoleh:

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 11 \\ 108 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh Solusi penyelesaian persamaan diferensial biasa yaitu solusi khusus (y_p) yaitu:

menyatakan baris dan indeks kedua menyatakan kolom. (Anton, 2009)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bentuk umum sistem persamaan linier (SPL) yang terdiri dari m buah persamaan dan n buah peubah dituliskan sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = k_2$$

$$D_1 X_1 + D_2 X_2 + \dots + D_n X_n = I$$

Dengan a_i dan k_i merupakan konstanta dan $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

Sistem persamaan linier diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$$

Misalkan A adalah matriks bujursangkar, maka sebuah vektor tak nol dalam dinamakan vektor eigen dari A jika Av adalah kelipatan skalar dari v , yaitu: $Av = \lambda v$ dengan λ adalah skalar. Selanjutnya dinamakan nilai eigen dari A dan v dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan A yang terkait dengan λ . (Anton & Rorres, 2004)

Nilai eigen dan vektor eigen

Penerapan matriks untuk persoalan teknik yang menyangkut gandingan osilasi atau vibrasi, kita jumpai persamaan dalam bentuk :

$Ax = \lambda \cdot x$ dengan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujur sangkar dan λ adalah bilangan (skalar). Untuk solusi non-trivial yaitu $x \neq 0$, harga λ yang memenuhi persamaan disebut nilai eigen atau nilai karakteristik dari matriks A dan solusi yang bersesuaian dengan persamaan yang diberikan $Ax = \lambda \cdot x$ disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari A .

Bila persamaan diatas dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan yang terpisahkan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Bila ruas kanan dipindahkan ke ruas kiri, persamaannya menjadi :

$$\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{array}$$

Agar sistem persamaan linier homogen ini (yaitu semua konstanta diruas kanan sama dengan nol) mempunyai solusi non-trivial maka haruslah: $|A - \lambda I| = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$I - I'$ disebut determinan karakteristik dari A dan $I - I' = 0$ disebut persamaan karakteristiknya. Dengan menjabarkan determinan tersebut akan diperoleh sebuah polinomial berderajat n dan pemecahan persamaan karakteristiknya memberikan harga λ yaitu nilai eigen dari A .

$$\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & (\lambda-1) & 0 \\ 2 & 0 & (\lambda-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan

$$-x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow -x_1 = x_3$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -2x_2$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan

$$\lambda_3 = 3 \text{ yaitu } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh solusi homogen dari SPD yaitu:

$$y_h = C_1 v_1 e^{4x} + C_2 v_2 e^{4x} + C_3 v_3 e^{4x}$$

$$y_h = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4x} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}$$

Solusi khusus (y_p) dari fungsi tak homogen

$F(x)$

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ -e^{2x} \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin x$$

Dapat dilihat $F(x)$ memuat bentuk-bentuk polinomial dan eksponensial, dan $F(x)$ tidak sama dengan solusi homogen dari SPD, sehingga dapat dipilih permasalahan $F(x)$ yaitu:

$$y_p = ax^2 + bx + c + d e^{2x} + e \cos x + f \sin x$$

Substitusikan y_p pada sistem persamaan diferensial :

$$(y_p)' = A y_p + F(x)$$

$$2ax + b + 2d e^{2x} - e \sin x + f \cos x = Aax^2 + Abx + Ac + Ad e^{2x} + Ae \cos x + Af \sin x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^2$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin x$$

Dari persamaan diatas, untuk menentukan koefisien -koefisien a, b, c, d, e, f sesuai dengan variabelnya, yaitu:

1. koefisien dari x^2 yaitu

$$0 = Ad + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. koefisien dari x yaitu $2a \square Ab$

3. koefisien dari e^{2x} yaitu:

$$2d = Ad + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. koefisien dari $\sin x$ yaitu:

$$-e = Af + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. koefisien dari $\cos x$ yaitu:

$$f = Ae$$

6. koefisien dari konstanta yaitu:

$$b = Ac$$

Dari persamaan diatas diperoleh:

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 11 \\ 108 \\ 31 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} -54 \\ 19 \\ 54 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh Solusi penyelesaian persamaan diferensial biasa yaitu solusi khusus (y_p) yaitu :

$$y_p = \begin{vmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{11}{108} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{10} & \frac{11}{108} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{10} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{11}{108} \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} \cos x + \begin{vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{11}{108} \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} \sin x$$

Jadi solusi umum dari SPD tak homogen yang diberikan adalah:

$$y = y_h + y_p = c_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} e^x + c_2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} e^{2x} + c_3 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} e^{3x} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{11}{108} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{10} & \frac{11}{108} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{10} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{11}{108} \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} \cos x + \begin{vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{11}{108} \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} \sin x$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{11}{108} \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} \cos x + \begin{vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{11}{108} \\ 0 & \frac{2}{10} & -\frac{31}{54} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{9} & \frac{19}{54} \end{vmatrix} \sin x$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Langkah-langkah

menentukan

penyelesaian sistem persamaan diferensial tak homogen dengan nilai eigen dan vektor eigen dan koefisien tak tentu adalah:

1. Menuliskan sistem dalam bentuk matriks $y' = Ay + F(x)$
2. Menghitung determinan dari matriks koefisien B, jika $\text{Det}(B) = 0$ maka perhitungan tidak dilanjutkan.

3. Menentukan solusi homogen dari sistem $y' = Ay$ yaitu: $y_h = c_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 x}$ dengan λ dan v merupakan nilai dan vektor eigen dari matriks B..
4. Mencari solusi khusus dari fungsi tak homogen $F(x)$ dengan cara melihat dan mencocokkan bentuk fungsi $F(x)$ dengan bentuk yang tersedia dan solusi homogen, kemudian pilih permisalan y_p yang bentuknya sesuai dengan bentuk $F(x)$ setelah itu substitusikan y_p kedalam sistem $y' = Ay + F(x)$ untuk mencari koefisien-koefisien dari y_p .
5. Diperoleh solusi umum dari sistem persamaan diferensial linear tak homogen yaitu $y = y_h + y_p$.

Bagi pembaca yang tertarik dan untuk memperdalam disarankan membahas mengenai metode ini, dapat mengkaji tentang solusi sistem persamaan diferensial linear biasa dengan orde yang lebih tinggi dan dengan metode yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard, 2009. *Dasar-dasar Aljabar Linear (Jilid 1)*. Tangerang: Binarupa Aksara.
- Anton, H dan C, Rorres, 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi (Edisi Kedelapan)*. Terjemahan oleh R. Indriyanti dan I. Harman. Jakarta: Erlangga.
- Finizio, N dan G, Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Terjemahan oleh Dra. Widiarti. Santoso. Jakarta: Erlangga.
- Goode, S. W. 1991. *An Introduction to Differential Equations and Linear Algebra*. New York: Prentice-Hall International, Inc.
- Purcell, E, J, D. Varberg, dan S, E, Rigdon. 2004. *Kalkulus Jilid 2 (Edisi Kedelapan)*. Jakarta: Erlangga.
- Shepley L. Ross. 1974. *Differential Equations*. New York: Prentice-Hall International, Inc.