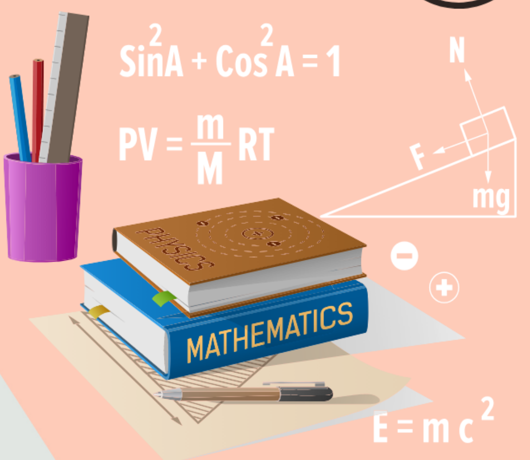
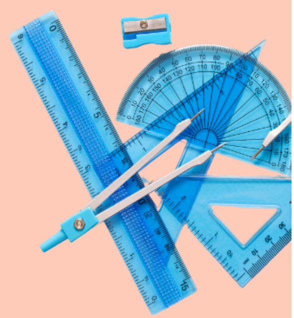
HEI PUBLISHING
CAKRAWALA JADI TULISAN

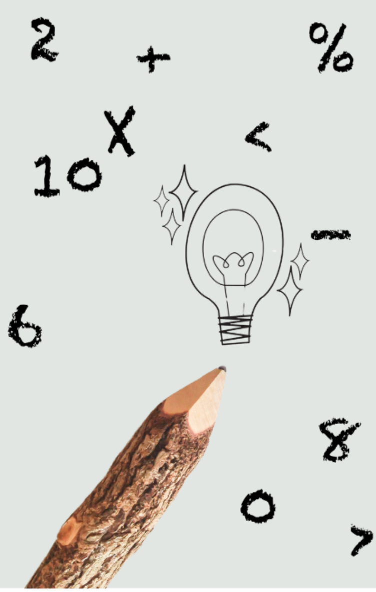
KALKULUS 1



Penulis :

- Farman
- Juliana Pebrina Siburian
- Rindu Alriavindra Funny
- Winda Aprianti
- Veri Julianto
- Widiya Astuti Alam Sur
- Mardiati
- Didiek Hari Nugroho





KALKULUS 1

Farman
Juliana Pebrina Siburian
Rindu Alriavindra Funny
Winda Aprianti
Veri Julianto
Widiya Astuti Alam Sur
Mardiati
Didiek Hari Nugroho

HEI PUBLISHING
CAKRAWALA JADI TULISAN

CV HEI PUBLISHING INDONESIA

KALKULUS 1

Penulis:
Farman
Juliana Pebrina Siburian
Rindu Alriavindra Funny
Winda Aprianti
Veri Julianto
Widiya Astuti Alam Sur
Mardiati
Didiek Hari Nugroho

ISBN: 978-623-8722-80-8

Editor : Meta Lubis, S.Si, M.Pd
Penyunting : Ratna Sari, S.Pd
Desain Sampul dan Tata Letak : Ipah Kurnia Putri S.St

Penerbit : CV HEI PUBLISHING INDONESIA
Nomor IKAPI 043/SBA/2023

Redaksi :
Jl. Air Paku No.29 RSUD Rasidin, Kel. Sungai Sapih, Kec Kuranji
Kota Padang Sumatera Barat
Website : www.HeiPublishing.id
Email : heipublishing.id@gmail.com

Cetakan pertama, Oktober 2024

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah subhanahu wa'taala atas rahmat dan karunia-Nya sehingga buku "Kalkulus 1", dapat terselesaikan dengan baik. Buku ini berisikan tentang Pendahuluan, Sistem Bilangan Riil, Fungsi, Turunan Fungsi Aljabar, Kemonotonan Dan Kecekungan, Aplikasi Integral Tentu, Teknik Integrasi, Penerapan Integral.

Semoga buku ini dapat menjadi referensi yang bermanfaat bagi mahasiswa, dosen, dan para profesional di bidang Kalkulus, serta siapa saja yang tertarik mempelajari Kalkulus. Terima kasih kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam penyusunan buku ini, Harapan terbesar buku ini dapat memberikan manfaat dan kontribusi positif dalam perkembangan ilmu pengetahuan.

Selamat membaca dan semoga bermanfaat.

Padang, Oktober 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

Oleh Farman

Sejarah kalkulus merupakan suatu bukti besar yang membuktikan mengapa kalkulus menjadi pelajaran tingkat lanjut seperti sekarang ini. Penerapan materi kalkulus juga sama pentingnya dengan bidang lain untuk diketahui, sehingga nanti akan bisa dimanfaatkan dalam kehidupan. Memahami sejarah dan penerapan kalkulus bukan hanya memberikan wawasan yang mendalam tentang perkembangan ilmu ini, tetapi juga mempersiapkan bagi yang mempelajarinya untuk memanfaatkan pengetahuan tersebut secara efektif dalam kehidupan nyata, memastikan bahwa kalkulus tetap relevan dan berguna dalam berbagai bidang di masa depan. Oleh karena itu, buku ini diawali dengan pendahuluan untuk menyajikan konsep kalkulus, sejarah kalkulus dan kegunaan kalkulus.

1.1 Konsep Kalkulus

Kata kalkulus berasal dari Bahasa Latin *calculus*, yang artinya "batu kecil" atau "kerikil", yang dapat digunakan untuk membantu proses penghitungan. Kalkulus pada dasarnya berkaitan dengan perubahan dan gerakan. Sederhananya, kalkulus merupakan salah satu cabang matematika yang membahas proses penghitungan perubahan besaran (dan sifat-sifat tertentu) dalam bidang matematika dan berbagai cabang ilmu pengetahuan, termasuk ilmu sosial. Kekuatan praktis kalkulus yang luar biasa disebabkan oleh kemampuannya menggambarkan dan memprediksi perilaku perubahan suatu besaran. Konsep geometri, aljabar, dan trigonometri dapat diterapkan pada benda yang bergerak dengan kecepatan tetap; namun, metode yang diperkenalkan dalam kalkulus diperlukan untuk mempelajari orbit planet, menghitung penerbangan roket, memprediksi jalur partikel bermuatan pada medan elektromagnetik dan hal lain yang menangani semua aspek gerak.

Perkembangan kalkulus mengalami perkembangan pesat setelah munculnya metode komputasi yang efisien. Perkembangan ini sebagian besar didorong oleh dua masalah geometri, yaitu (1) mencari garis singgung kurva yang berhubungan dengan turunan fungsi yang mendefinisikan kurva tersebut dan (2) menemukan luas daerah bidang yang berkaitan dengan konsep integral (Gajjar, 2020). Dua permasalahan tersebut kemudian memunculkan gagasan dalam bidang utama kalkulus, yaitu kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Kalkulus diferensial berhubungan dengan pergerakan seperti kemiringan dan kecepatan, dan kalkulus integral berkaitan dengan nilai total seperti luas dan volume. Kedua cabang tersebut saling melengkapi, karena proses kalkulus integral dianggap sebagai proses kebalikan dari kalkulus diferensial. Kedua hal tersebut dihubungkan oleh teorema dasar kalkulus.

Perkembangan kalkulus, baik kalkulus diferensial maupun kalkulus integral merupakan salah satu pencapaian terpenting dalam matematika. Secara umum, Kalkulus diferensial menyediakan metode untuk menghitung “laju perubahan” suatu nilai besaran variabel. Kalkulus diferensial merupakan suatu mata pelajaran yang dapat diterapkan pada segala sesuatu yang bergerak, berubah, atau mempunyai bentuk. Salah satu penerapan utama kalkulus diferensial adalah adalah dalam masalah optimasi (memaksimalkan atau meminimalkan sesuatu) (Thomas, 1996). Di sisi lain, kalkulus integral menyediakan metode untuk menghitung dampak total dari perubahan tersebut, dalam kondisi tertentu. Kalkulus integral menyediakan metode untuk perhitungan besaran seperti luas dan volume bangun datar lengkung. Rohde et al. (2012) menyatakan bahwa tidak ada cabang matematika lain yang membantu dalam menghitung area dengan batas melengkung. Penggunaan konsep kalkulus integral ini juga berguna untuk pengukuran dimensi kurva matematika.

Buku ini dirancang untuk memberikan pemahaman yang komprehensif tentang kalkulus, dimulai dari konsep dasar hingga penerapan yang lebih kompleks. Secara garis besar materi yang disajikan dalam buku ini mencakup bilangan riil, fungsi, limit, hingga ke konsep yang lebih lanjut seperti turunan dan integral. Melalui penjelasan yang sistematis dan berbagai contoh aplikasi, buku ini bertujuan untuk menjembatani pembaca dari pemahaman dasar hingga mampu menerapkan kalkulus dalam konteks nyata.

Bilangan Riil. Bilangan adalah alat dasar untuk analisis kuantitatif. Intinya, bilangan adalah sistem simbol matematika yang dirancang dengan tujuan untuk merepresentasikan berbagai masalah kuantitatif secara ringkas dan menyediakan kerangka kerja yang efisien untuk mempelajari dan memecahkannya. Dalam matematika, besaran bertipe penghitungan diwakili oleh bilangan asli sedangkan besaran bertipe pengukuran diwakili oleh bilangan real. Dengan kata lain, sistem bilangan asli, N, dan sistem bilangan real, R, adalah sistem matematika yang dirancang untuk menangani permasalahan kuantitatif tipe penghitungan dan tipe pengukuran (Hsiang, 1995). Konsep bilangan riil, operasi bilangan dan sifat-sifat yang berlaku didalamnya akan dibahas pada Bab 2.

Fungsi. Gagasan tentang suatu fungsi merupakan hal mendasar dalam kalkulus. Pembahasan yang mendalam mengenai hal ini memerlukan studi mendalam tentang sistem bilangan real dan tingkat kemampuan matematis yang cukup (Burdette, 2014). Dalam pembelajaran kalkulus, akan lebih fokus pada fungsi-fungsi yang berkaitan dengan bilangan. Konsep fungsi, grafik fungsi dan operasinya akan dibahas pada Bab 3.

Limit. Konsep limit muncul ketika mencoba mencari luas suatu daerah, kemiringan garis singgung suatu kurva, kecepatan, atau jumlah deret tak hingga. Dalam setiap kasus, tema umumnya adalah penghitungan besaran sebagai batas besaran lain yang mudah dihitung. Ide dasar tentang limit inilah yang membedakan kalkulus dari bidang matematika lainnya. Jadi, dapat didefinisikan bahwa kalkulus sebagai bagian matematika yang berhubungan dengan limit (Stewart, 2008). Dengan menggunakan pengertian limit sebagai alatnya, turunan suatu fungsi didefinisikan sebagai limit suatu jenis tertentu. Menentukan turunan suatu fungsi tertentu merupakan pokok bahasan kalkulus diferensial. Di sisi lain, menghitung fungsi yang turunannya adalah fungsi tertentu merupakan subjek kalkulus integral. Fungsi yang diperoleh disebut antiturunan dari fungsi yang diberikan. Jadi, konsep limit terlibat dalam kalkulus diferensial dan integral. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa kalkulus sebagai studi tentang limit. Hal ini menunjukkan bahwa sangat penting untuk memiliki pemahaman mendalam tentang konsep ini terlebih dahulu. Topik ini disajikan dan dibahas dengan cara yang sangat sederhana dalam Bab 4.

Kontinuitas. Kontinuitas adalah konsep fundamental dalam kalkulus yang memastikan bahwa fungsi tidak mengalami gangguan (terpotong atau memiliki lompatan) pada titik tertentu. Konsep kontinuitas sangat berkaitan erat dengan limit dan perilaku fungsi pada titik-titik tertentu serta pada interval tertentu. Konsep kontinuitas sangat erat kaitannya dengan konsep limit. Limit menggambarkan perilaku fungsi saat mendekati suatu titik, sedangkan kontinuitas memastikan bahwa tidak ada perubahan mendadak pada nilai fungsi tersebut. Menentukan apakah suatu fungsi kontinu melibatkan pengecekan syarat-syarat tertentu, termasuk keberadaan fungsi pada titik tersebut, kesamaan limit dari arah kiri dan kanan, serta kecocokan antara limit dan nilai fungsi. Dalam praktik, memahami kontinuitas sangat penting untuk analisis fungsi yang lebih lanjut, termasuk dalam persamaan diferensial, optimasi, dan aplikasi teknik lainnya. Materi ini dibahas pada Bab 5.

Turunan (Derivatif). Konsep turunan dalam kalkulus merupakan salah satu konsep inti yang digunakan untuk menggambarkan perubahan suatu fungsi. Turunan memberikan informasi tentang kemiringan garis singgung pada grafik fungsi dan bagaimana fungsi tersebut berubah seiring perubahan variabel independennya. Secara intuitif, turunan dari suatu fungsi pada titik tertentu menggambarkan laju perubahan fungsi tersebut pada titik tersebut. Turunan merupakan limit dari perbandingan perubahan kecil nilai fungsi terhadap perubahan kecil pada variabel independennya. Konsep ini secara detail akan dijelaskan pada Bab 6, 7 dan 8. Dalam bab 6, akan dijelaskan konsep turunan, dan menurunkan rumus turunan fungsi standar. Pada Bab 7 akan mempelajari aturan turunan fungsi aljabar (jumlah, selisih, hasil kali dan hasil bagi) untuk mencari turunan suatu fungsi. Sedangkan Bab 8 membahas tentang penerapan turunan untuk mengetahui sifat-sifat yang dimiliki suatu kurva seperti kemonotonan dan kecekungan.

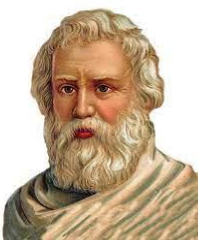
Integral. Konsep integral adalah salah satu fondasi utama dalam kalkulus, bersama dengan turunan. Secara sederhana dapat dikatakan bahwa intergral adalah invers (kebalikan) dari fungsi turunan atau anti turunan. Integral memiliki dua bentuk utama: integral tak tentu dan integral tentu. Integral merupakan operasi yang menghitung luas, volume, jumlah akumulatif, dan lain sebagainya. Konsep integral, metode teknik integasi dan penerapan intergral akan dibahas pada Bab 9, 10, 11 dan 12.

1.2 Sejarah Perkembangan Kalkulus

Penemuan prinsip dasar kalkulus sebenarnya dilakukan secara independen oleh Isaac Newton (Inggris) dan Gottfried Leibniz (Jerman) pada akhir abad ke-17. Namun, banyak ahli matematika dan filsuf di zaman kuno membuat penemuan yang berkaitan dengan kalkulus. Asal usul penemuan kalkulus dapat ditelusuri kembali ke Sejarah Kuno Yunani, Mesir, dan Cina, dan India Abad Pertengahan, Timur Tengah, dan Eropa. Pemikir atau ilmuwan Yunani paling banyak memberikan bukti dan pengaruh terhadap penemuan dan perkembangan kalkulus.

Zeno dari Elea (490 - 425 SM) adalah seorang filsuf Yunani yang sangat berpengaruh dalam memotivasi ahli matematika selama beberapa dekade untuk menemukan ide-ide baru. Dia dikenal karena paradoksnya, yang menantang ide-ide matematika saat itu dan menginspirasi matematikawan masa depan. Ada satu paradoks spesifik yang mempengaruhi penemuan infinitesimals, deret tak hingga, limit, dan beberapa dimensi kalkulus lainnya. Paradoks ini menyatakan bahwa seseorang yang berlomba tidak akan pernah bisa mencapai garis finish. Argumen Zeno mengatakan ada titik tengah yang tak terbatas untuk dicapai. Setelah pelari memulai lomba dan mencapai titik tengah pertama, dia kemudian harus mencapai setengah jalan dari sisa jalannya. Paradoks ini menemui jalan buntu banyak ahli matematika, sehingga memunculkan motivasi untuk menemukan solusi, hingga ditemukan kalkulus. Paradoks Zeno menantang banyak teori matematika yang ada dan menginspirasi teori penemuan mengenai turunan, integral dan limit.

Eudoxus (408 - 305 SM) dari Cnidus merupakan seorang astronom dan matematikawan Yunani, yang membuat salah satu penemuan penting yang menjadi dasar awal perkembangan kalkulus. Penemuan ini dikenal sebagai metode eksaustif, yaitu teknik matematika yang digunakan untuk mendekati nilai sebenarnya suatu besaran, seperti luas atau volume, dengan menggunakan serangkaian pendekatan yang semakin mendekati hasil yang tepat. Eudoxus menemukan cara untuk menghitung atau memperkirakan luas dan volume yang dibatasi oleh kurva atau permukaan (seperti lingkaran) dengan mendekatinya sebagai poligon yang jumlah sisinya semakin banyak. Pada masa itu, hanya ada perhitungan luas wilayah poligon, bukan bentuk melengkung. Metode yang ditemukan Eudoxus dalam "menghabiskan" area dan volume ini menjadi cikal bakal kalkulus. Meskipun metode ini tidak menjadi sangat populer pada saat itu, hal ini menginspirasi ahli matematika lain di masa mendatang untuk melanjutkan pengembangannya. Oleh karena itu cukup sah untuk menganggap Eudoxus sebagai penemu filsafat konseptual kalkulus integral (Friedman & Kandel, 2011).



Archimedes (287 - 212 SM) dari Syracuse adalah seorang matematikawan, fisikawan, dan ahli fisika Yunani yang terkenal. Archimedes juga dikaitkan dengan penemuan awal kalkulus modern. Archimedes mengadopsi dan mengembangkan metode eksaustif, yang ditemukan Eudoxus. Dengan metode ini, Archimedes berhasil menghitung luas di bawah parabola, serta luas permukaan dan volume bola. Archimedes adalah salah satu ahli matematika pertama yang berhasil menemukan cara untuk membuat garis singgung pada sebuah kurva, sebuah konsep penting dalam kalkulus. Dia juga merupakan ahli matematika pertama yang menghitung perkiraan akurat terkait luas lingkaran, dengan menggunakan pendekatan poligon sama sisi yang digambar di dalam dan di luar lingkaran untuk membatasi lingkaran dari atas dan bawah. Metode ini adalah contoh awal dari konsep integrasi, yang digunakan untuk menghitung luas area di bawah kurva. Hasil dari proses ini memberikan perkiraan awal untuk nilai π (pi) (Friedman & Kandel, 2011). Archimedes membuat banyak penemuan matematika yang luar biasa, namun perluasan metode eksaustifnya sangat penting bagi kalkulus modern.

Paradoks Zeno tentang nilai-nilai terbatas tampaknya memiliki tambahan tak terbatas. Eudoxus dan Archimedes berhasil menganalisis kurva, membentuk tema utama kalkulus. Penemuan Eudoxus nampaknya menyerupai kalkulus integral. Sedangkan Archimedes menggunakan penemuan ini untuk memfasilitasi metode baru yang menyerupai kalkulus diferensial. Penemuan mereka merupakan cikal bakal dasar kalkulus modern. Mereka telah menginspirasi generasi matematikawan untuk menantang gagasan deret berhingga dan tak hingga yang diperkenalkan ide baru kalkulus modern yang disebut limit. Batas adalah alat utama dalam integral dan diferensial kalkulus (Thompson, 2023).

Isaac Newton (1642-1727) adalah seorang matematikawan, astronom, fisikawan, dan ilmuwan yang berasal dari Woolsthorpe, Inggris. Penulis yang membuat banyak penemuan matematika yang luar biasa. Penemuannya yang paling berpengaruh termasuk metode fluksi dan teorema dasar kalkulus. Ini merupakan kejutan pada abad ke-17, Newton membuat metode yang menganalisis gradien atau kemiringan fungsi lengkung di mana x dan y nilai selalu berubah, bukan fungsi linier yang menggambarkan hubungan x dan y yang membuat garis lurus. Metode fluksi ini sekarang dikenal sebagai diferensiasi atau penyelesaian turunan, yaitu laju perubahan suatu fungsi terhadap variabel lain. Newton menghitung fungsi yang menyelesaikan turunan y terhadap x. Dengan menggunakan hal ini, Newton kemudian sampai pada kesimpulan bahwa diferensiasi dan integrasi adalah dua hal yang saling invers, artinya jika suatu fungsi didiferensiasikan kemudian diintegrasikan, maka akan diperoleh fungsi asli. Hal ini mengarah pada penemuan apa yang sekarang kita sebut sebagai teorema fundamental kalkulus dan juga menginspirasi banyak topik lain dalam matematika dan aplikasi pada fisika dan astronomi.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) lahir di Leipzig adalah seorang matematikawan, penulis, dan ilmuwan yang memberikan banyak kontribusi pada berbagai bidang seperti fisika, filsafat, dan hukum. Leibniz dikreditkan karena membantu merintis banyak konsep matematika seperti notasi titik untuk perkalian, tanda kurung untuk pembagian ekspresi aljabar, dan simbol titik dua mewakili pembagian atau rasio. Ketika melihat secara khusus cabang kalkulus, Leibniz mengambil pandangan pendekatan metafisika terhadap subjek dan termotivasi untuk menemukan cara menjelaskan hubungan terbalik integral dan turunannya. Dia menemukan hubungan terbalik ini dan sebenarnya mempublikasikan temuannya sebelum Newton. Perbedaannya adalah Leibniz mempunyai gambaran yang lebih jelas pada notasi. Dia menciptakan notasi $\int f(x)dx$ untuk integrasi, dan $\frac{dy}{dx}$ untuk diferensiasi. Meskipun banyak orang mengandalkan karya Newton, kalkulus modern sangat bergantung pada notasi Leibniz daripada notasi Newton. Leibniz menciptakan notasi yang dapat digeneralisasikan. Mengesampingkan kontroversi tersebut, kedua ahli matematika tersebut membuat penemuan luar biasa tentang integral dalam menyelesaikan bidang fungsi dan turunannya dapat menyelesaikan laju perubahan. Penemuan mereka merupakan hal yang revolusioner pada masa itu abad ke-17 hingga zaman modern.

Isaac Newton dan Gottfried Leibniz keduanya menemukan dan mengembangkan notasi untuk teorema dasar kalkulus secara independen dan menerbitkan karya mereka pada waktu yang sama. Newton tampak ragu-ragu dan ingin memastikan keakuratan karyanya sementara Leibniz tampak sangat bersemangat untuk mempublikasikan karyanya. Jadi, Leibniz sebenarnya yang pertama kali menerbitkan karyanya, namun Newton mengaku sudah memikirkan mereka terlebih dahulu. Hal ini menyebabkan kedua ahli matematika tersebut saling menuduh menjiplak atau mencuri karya satu sama lian dan perseteruan ini berlangsung hingga keduanya meninggal. Terlepas dari hal tersebut, Newton dan Leibniz sama-sama sangat berpengaruh dalam Kalkulus dan tidak diragukan lagi merupakan inspirasi bagi perkembangan keilmuan masa depan. Penemuan yang dilakukan oleh kedua ahli matematika ini sangat penting, tanpa keduanya, kalkulus modern tidak akan seperti sekarang ini (Thompson, 2023).

1.3 Penerapan Kalkulus

Seiring perkembangan ilmu dan teknologi, kalkulus tidak hanya digunakan dalam bidang matematika tetapi juga dapat digunakan di setiap cabang ilmu fisika, ilmu komputer, statistik, teknik, ekonomi, bisnis, kedokteran, demografi, dan banyak bidang lainnya. Ada banyak sekali penerapan kalkulus dalam matematika dan berbagai bidang lainnya. Menjelajahi semua subjek dan inti kalkulus yang berbeda ini akan menjadi contoh betapa pentingnya kalkulus bagi kehidupan.

Fisika. Dimulai dengan contoh yang lebih jelas, kalkulus memainkan peran besar di dunia fisika, khususnya kinematika. Singkatnya, mata pelajaran fisika mempelajari benda-benda materi dan pergerakannya melalui ruang dan waktu. Dengan penekanan pada gerakan tersebut, kalkulus memberikan dasar untuk menghitung kecepatan pergerakan benda-benda ini. Kinematika menggunakan kalkulus integral untuk menghitung besaran seperti kecepatan dan laju percepatan.

Arsitektur. Arsitek menggunakan kalkulus untuk membangun struktur dengan kualitas terbaik sambil mempertimbangkan perubahan variabel seperti kualitas bahan, seberapa besar tekanan yang dapat diterima struktur dari waktu ke waktu, dan ukuran, bentuk, dan sudut material yang dibuat akan mengoptimalkan daya tahannya. Misal, menara Eiffel dibangun menggunakan konsep kalkulus dimana arsitek membentuk model matematika yang memberikan rencana desain terbaik untuk mengoptimalkan keluaran hambatan angin berdasarkan masukan tinggi dan berat menara (Weidman & Pinelis, 2004).

Astronomi. Para astronom menginginkan hasil fotografi terbaik untuk memfasilitasi analisis yang akurat menggunakan pemrosesan gambar untuk membersihkan dan memfilter gambar yang diambil oleh satelit luar angkasa dan teleskop. Kalkulus pecahan (*fractional calculus*) dapat digunakan dalam bidang astronomi untuk meningkatkan pemahaman dan analisis gambar astronomi. Dengan kalkulus pecahan, para ilmuwan dapat memperbesar visibilitas atau kejelasan struktur galaksi, memulihkan gambar yang memiliki kontras rendah atau detail yang sulit terlihat, serta meningkatkan kualitas dan ketajaman gambar permukaan planet. Kalkulus pecahan membantu dalam pemrosesan dan analisis gambar sehingga detail-detail yang sebelumnya sulit diamati menjadi lebih jelas (Sparavigna & Milligan, 2009). Kalkulus juga dapat digunakan untuk menghitung laju perubahan benda bergerak di ruang angkasa planet dan bintang yang terus bergerak. Cabang matematika ini cukup signifikan dalam bidang astronomi modern karena memainkan peran yang sangat besar memperluas dan meningkatkan berbagai bidang astrofotografi dan astronomi.

Ekonomi. Kalkulus dan beberapa cabang matematika lainnya sangat membantu dalam bidang ekonomi. Misalnya kalkulus dapat menganalisis dan menggabungkan fungsi biaya, permintaan, dan pendapatan untuk mendapatkan fungsi total produksi dan total keuntungan. Seseorang dapat membedakan persamaan ini untuk mendapatkan persamaan baru yang memberikan nilai optimasi keuntungan berdasarkan masukan jumlah item produksi (Marsitin, 2019).

Kedokteran dan Biologi. Kalkulus berperan penting dalam kemajuan dunia kedokteran, membantu menghasilkan inovasi-inovasi yang dapat meningkatkan kesehatan manusia. Dengan menggunakan kalkulus, dokter dan ilmuwan dapat membuat model, menganalisis data medis, dan memahami proses biologis yang kompleks, seperti aliran darah, penyebaran obat dalam tubuh, atau pertumbuhan tumor. Memantau perubahan dalam data medis dan statistik selama beberapa dekade, para peneliti dapat menemukan obat-obatan dan terapi untuk mengatasi penyakit tertentu serta memprediksi potensi penyakit atau komplikasi di masa depan. Salah satu alat yang digunakan dalam proses ini adalah persamaan diferensial, yang membantu ilmuwan dalam menganalisis faktor-faktor yang mungkin mempengaruhi hasil kesehatan (faktor perancu), mengoptimalkan dosis obat yang paling efektif, dan meminimalkan efek samping atau dampak negatifnya.

Epidemiologi. Kalkulus juga bermanfaat dalam epidemiologi, yaitu cabang kedokteran yang mempelajari penyebaran, pola, dan penyebab penyakit. Kalkulus digunakan untuk menganalisis data epidemiologi, seperti tingkat penyebaran penyakit, laju infeksi, dan perubahan dalam populasi yang terkena. Dengan kalkulus, para ahli dapat membuat model matematika yang membantu mereka memahami dinamika penyakit dan merancang strategi untuk mencegah atau mengendalikan wabah penyakit. Misal pandemi COVID-19 adalah salah satu contoh bagaimana ahli epidemiologi menggunakan kalkulus untuk membuat perhitungan secara akurat tentang tingkat penyebaran penyakit dan membantu mengurangi penyebaran penyakit ini secara global.

Teknik (Listrik, Mekanikal, dan Nuklir). Insinyur elektronik menggunakan kalkulus untuk menyelesaikan persamaan diferensial dalam pemeriksaan sirkuit elektronik, peluruhan radioaktif, dan mekanisme servo (Sawant, 2018). Salah satu contohnya adalah Transformasi Laplace; metode ini membantu menyelesaikannya persamaan diferensial dengan menggunakan sesuatu yang disebut integral Laplace untuk mengubahnya ke dalam persamaan aljabar. Ini adalah metode yang digunakan untuk menganalisis dan menyederhanakan perhitungan pemodelan sistem, pemrosesan sinyal digital, dan kontrol proses. Metode ini adalah penting untuk banyak bidang teknik (Sawant, 2018).

Pemrograman dan teknologi komputer yang mendominasi dunia saat ini juga sangat bergantung pada kalkulus, karena kalkulus memungkinkan perhitungan yang kompleks, analisis algoritma, dan pengembangan model matematis yang penting dalam inovasi perangkat lunak dan teknologi digital. Dengan demikian, seiring dengan semakin luasnya cakupan dan penerapannya, kalkulus terus membuktikan perannya yang krusial dalam berbagai disiplin ilmu, menjadikannya landasan yang tak tergantikan bagi kemajuan sains, teknologi, dan berbagai bidang lainnya di era modern ini.

DAFTAR PUSTAKA

Burdette, A. C. (2014). *An Introduction to Analytic Geometry and Calculus*. Academic Press.

Friedman, Menahem & Kandel. (2011). *Calculus Light*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Gajjar, P. (2020). *Foundation Calculus*. Bloomsbury Publishing.

Hsiang, W. (1995). *A Concise Introduction to Calculus*. World Scientific Publishing Company.

Marsitin, R. (2019). Analysis of Differential Calculus in Economics. *Journal of Physics: Conference Series*, *1381*, 012003.

Rohde, U. L., Jain, G. C., Poddar, A. K., & Ghosh, A. K. (2012). *Introduction to Integral Calculus: Systematic Studies with Engineering Applications for Beginners*. John Wiley & Sons.

Sawant, L. S. (2018). Applications of laplace transform in engineering fields. *International Journal of Engineering and Advanced Research Technology (IJEART)*, 5(5), 31003105.

Sparavigna, A.C., & Milligan, P.A. (2009). Using fractional differentiation in astronomy. *arXiv*. Instrumentation and Methods for Astrophysics.

Stewart, J. (2008). *Calculus: Early transcendentals* (6th ed). Thomson Brooks/Cole.

Thomas, C. (1996). *Introduction to differential calculus*. University of Sydney.

Thompson, L. (2023). *The History and Applications of Calculus* [Thesis]. Robert D. Clark Honors College.

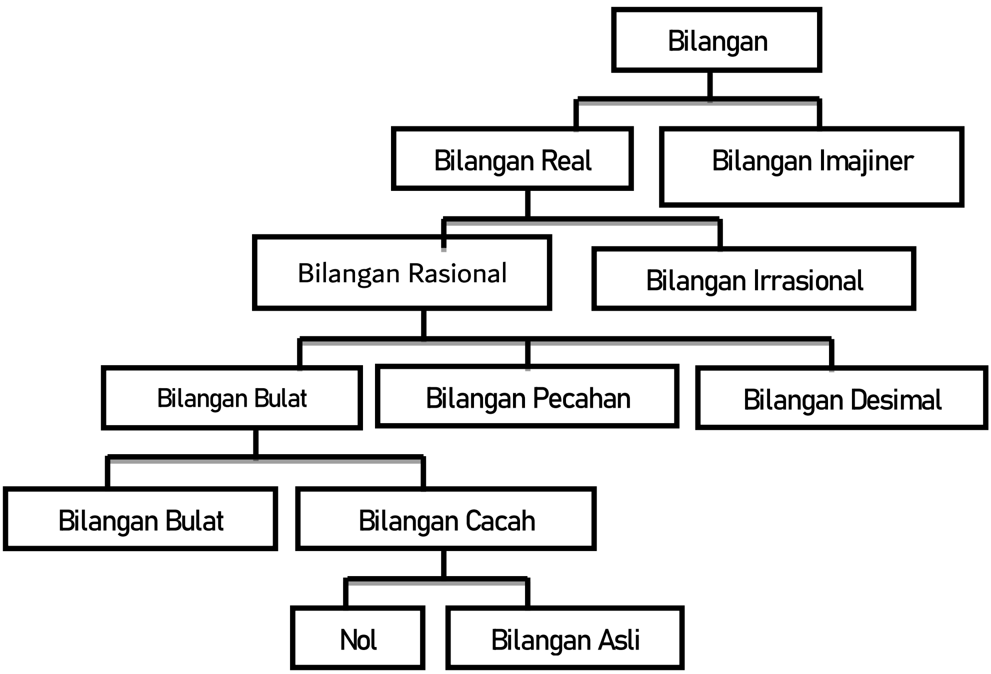
Weidman, P., & Pinelis, I. (2004). *Model equations for the Eiffel Tower profile: Historical perspective and new results*. Comptes Rendus Mécanique. 332. 571-584.

BAB 2
SISTEM BILANGAN RIIL

Oleh Juliana Pebrina Siburian

2.1 Sistem Bilangan Riil

Bilangan adalah konsep matematika yang digunakan dalam proses perhitungan, pengukuran dan pencacahan. Sistem bilangan merupakan suatu cara mewakili besaran suatu objek fisik. Himpunan bilangan riil merupakan gabungan dari himpunan bilangan rasional dan bilangan irrasional. Himpunan bilangan riil dapat dinotasikan dengan $R = \{x | x \in R\}$, Berikut dapat dilihat bagan himpunan bilangan berdasarkan kelompok bilangan.



Gambar 2.1. Jenis Bilangan Riil

Dari gambar di atas dapat dikatakan bahwa bilangan riil merupakan induk dari bilangan – bilangan matematika tersebut.

Komponen Himpunan Bilangan

Adapun Komponen – komponen Himpunan Bilangan adalah sebagai berikut:

1. Himpunan Bilangan Asli (N)

   Bilangan asli adalah adalah bilangan bulat yang bukan nol. Himpunan bilangan asli dinotasikan dengan N serta anggota-anggota bilangan asli yaitu 1, 2, 3, 4, 5, ... sehingga dapat dituliskan N = $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Jika setiap a, b bilangan himpunan asli maka $(a + b)$ dan $(a.b)$ bilangan asli.
2. Himpunan Bilangan Cacah

   Bilangan cacah adalah bilangan bulat positif yang dimulai dari nol sampai tak hingga. Himpunan bilangan cacah dinotasikan dengan W serta anggota-anggota bilangan cacah adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... sehingga dapat dituliskan W = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Jika untuk setiap a, b bilangan cacah maka $(a + b)$ dan $(a.b)$ bilangan cacah.
3. Himpunan Bilangan Bulat

   Bilangan bulat adalah bilangan yang terdiri dari bilangan negatif, nol dan bilangan asli. Himpunan bilangan bulat dinotasikan dengan Z serta anggota-anggotanya adalah $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ 4, \dots$ sehingga dapat dituliskan Z = $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
4. Himpunan Bilangan Rasional

   Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai pembagi dua bilangan bulat (pecahan) dengan syarat nilai penyebutnya tidak sama dengan nol, atau dapat dikatakan setiap bilangan rasional dapat dituliskan dalam bentuk desimal berulang. Bentuk umum $Q = \left\{x \mid \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0\right\}$.

   Contoh:

   $\frac{4}{5} = 0{,}800 \dots$

   $\frac{30}{-22} = -0{,}363636 \dots$

5. Himpunan Bilangan Irrasional
   Bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil pembagi dua bilangan bulat (pecahan) tetapi dapat dinyatakan dengan bilangan desimal tak tentu atau tak berulang. Bilangan irrasional dapat disebut juga bilangan tak terukur, bilangan irrasional dapat dituliskan $Q' = \{x|x \in Q\}$, contoh: $\mu = 3{,}14 \ldots$; $e = 2{,}71 \ldots$; $\sqrt{3} = 1{,}73 \ldots$ dan sebagainya.
6. Himpunan Bilangan Riil (Nyata)
   Himpunan bilangan riil dapat dinotasikan dengan $R = \{x|x \in R\}$, himpunan bilangan riil terdiri dari bilangan rasional dan bilangan irrasional.

Sifat Aljabar Bilangan Riil

1. Operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan riil memenuhi sifat-sifat berikut ini:
   a. Sifat Komutatif terhadap penjumlahan
      Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$.
   b. Sifat Asosiatif (Pengelompokan) terhadap penjumlahan
      Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a + b + c = a + (b + c)$
   c. Sifat Identitas terhadap penjumlahan
      Terdapat $0 \in R$ sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$
   d. Sifat invers terhadap penjumlahan
      Setiap $a \in R$ terdapat $-a \in R$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$
   e. Sifat Komutatif terhadap perkalian
      Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \times b = b \times a$
   f. Sifat Asosiatif (Pengelompokan) terhadap perkalian
      Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
   g. Sifat Identitas terhadap perkalian
      Terdapat $1 \in R$ sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$
   h. Sifat Invers terhadap perkalian
      Setiap $a \in R, a \neq 0$ terdapat $\frac{1}{a}, \in R$ sehingga $a \times \left(\frac{1}{a}\right) = 1$
   i. Sifat Distributif

Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:

1) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
2) $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$

Contoh: 1) $3 \times (10 + 2) = 3 \times 10 + 3 \times 2$

2) $3 \times (10 - 2) = (3 \times 10) - (3 \times 2)$

j. Untuk setiap $a, b \in R$ maka $a + (-b) = a - b$ (Pengurangan)

k. Untuk setiap $a, b \in R, b \neq 0$ maka $\frac{a}{b} = a : b$ (Pembagian)

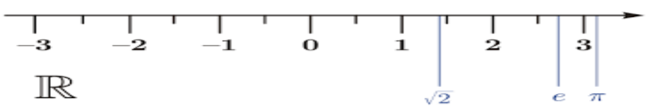
Catatan:

a. Untuk $a, b \in R, b \neq 0$ maka $a \times \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$

b. Untuk setiap $a \in R, \frac{a}{0}$ tidak didefenisikan (pembagian dengan nol tidak didefenisikan)

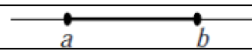
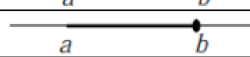
2.2 Garis Bilangan

Setiap bilangan riil mempunyai posisi pada suatu garis yang disebut dengan **garis bilangan**. Titik – titik di sebalah kanan titik asal (titik nol) disebut dengan positif, sedangkan titik-titik di sebelah kiri titik asal disebut bilangan negatif.



Selang atau Interval

Defenisi tentang selang atau interval adalah sebagai berikut:

Penulisan Interval	Penulisan Himpunan	Dalam Garis Bilangan
(a, b)	{x| a < x < b}	
[a, b]	{x| a ≤ x ≤ b}	
[a, b)	{x| a ≤ x < b}	
(a, b]	{x| a < x ≤ b}	
($-\infty$, b)	{x| x < b}	
($-\infty$, b]	{x| x ≤ b}	
(a, ∞)	{x| x > a}	

Penulisan Interval	Penulisan Himpunan	Dalam Garis Bilangan
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

2.3 Pertidaksamaan

Sistem pertidaksamaan memiliki notasi atau simbol yang perlu kita pahami terlebih dahulu yaitu $<, \leq, >, \geq$

Bentuk umum pertidaksamaan:

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$$

Dengan $A(x)$, $B(x)$, $C(x), D(x)$ adalah suku banyak (fungsi polinom) dan $B(x) \neq 0$ dan $D(x) \neq 0$

Himpunan Penyelesaian

Menyelesaikan suatu pertidaksamaan adalah mencari solusi dari semua himpunan bilangan riil yang membuat pertidaksamaan berlaku. Himpunan solusi bilangan riil dapat disebut jugaHimpunan Penyelesaian (HP).

Langkah-langkah Penentuan Himpunan Penyelesaian

Adapun langkah – langkah yang harus dilakukan untuk menentukan himpunan suatu bilangan adalah sebagai berikut:

1. Bentuk pertidaksamaan diubah menjadi $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$
2. Faktorkan $P(x)$ dan $Q(x)$ menjadi faktor-faktor linear dan/atau kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan $b^2 - 4ac < 0$
3. Tentukan titik pemecah (pembuat nol faktor linear)
4. Gambarkan titik – titik pemecah tersebut pada garis bilangan, kemudian tentukan tanda (+/-) bagi $\frac{P(x)}{Q(x)}$ disetiap selang bagian yang muncul
5. Tentukan HP yang memenuhi $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $-2 < 6 - 4x \leq 8$

Jawab:

$-2 < 6 - 4x \leq 8$

$-8 < -4x \leq 2$

$2 > x \geq -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \leq x < 2$

Maka HP = $[-\frac{1}{2}\ , 2)$

Sifat – Sifat Pertidaksamaan

Beberapa sifat – sifat pertidaksamaan yang perlu diketahui yaitu:

Misalkan a, b, c, d anggota himpunan bilangan real R

1. Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$
2. $a < b$ jika dan hanya jika $a + c < b = c$
3. Jika $a < b$ dan $c < d$ maka $a + c < b + c$
4. Jika $c > 0$ maka $a < b$ jika dan hanya jika $ac < bc$
5. Jika $c < 0$ maka $a < b$ jika dan hanya jika $ac > bc$
6. Jika a dan b memiliki tanda sama, maka $a < b$ jika dan hanya jika $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
7. Jika $a > 0\ , b > 0$ maka $a < b$ jika dan hanya jika $a^2\ < b^2$
8. Jika $a < 0, b < 0$ maka $a < b$ jika dan hanya jika $a^2\ > b^2$

2.4 Nilai Mutlak

Nilai mutlak pada bilangan real x dilambangkan dengan $|x|$ dan didefenisikan sebagai berikut:

$$|x| = \begin{cases} x, jika\ x \geq 0 \\ 0, jika\ x = 0 \\ -x, jika\ x < 0 \end{cases}$$

Defenisi tersebut menyatakan bahwa $|x|$ selalu bernilai tak negatif.

Contoh: $|5| = 5$, $|-7| = 7$, $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$, $|0| = 0$ dan $|x| = x$

Sifat-Sifat Nilai Mutlak

Berdasarkan defenisi di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $x \in R$ berlaku $|x| \geq 0$

1. $|-x| = |x|$, untuk setiap $x \in R$
   Misal $x = 3$
   Karena $-3 < 0$, maka $|-3| = -(-3) = 3$
   Disisi lain 3 > 0, maka $|3| = 3$
   Terbukti
2. $|x|^2 = x^2$, untuk setiap $x \in R$
   Misal $x = 5$
   *Kiri *Kanan
   $|5|^2 = 5^2$ $5^2 = 25$
   $= 25$
   Jadi $|5|^2 = 5^2 = 25$
   Terbukti
3. $|x| =$ a $\leftrightarrow x =$ a atau $x = -$a, untuk setiap $x \in R$
   Misal $|x| = 3$ maka $x =$ a atau $x = -$ a
   * $x = 3$ * $x = -3$
   $|3| = 3$ (Benar) $|-3| = 3$ (Benar)
   Jadi $|x| = 3 \leftrightarrow x = 3$ atau $x = -3$
   Terbukti
4. $|x.y| = |x| \times |y|$ untuk setiap $x, y \in R$
   Misal $x = -2$ dan $y = 3$
   * Kiri *kanan
   $|x.y| = |-2 \times 3|$ $|x||y| = |-2| \times |3|$
   $= |-6|$ $= -2 \times 3$
   $= 6$ $= 6$
   Jadi $|-2 \times 3| = |-2| \times |3| = 6$
   Terbukti
5. Jika x dan y bilangan real, maka $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

Misal $x = 6$ dan $y = 3$

* Kiri

$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{6}{3}\right|$

$= |2|$

$= 2$

*kanan

$\frac{|x|}{|y|} = \frac{|6|}{|3|}$

$= \frac{6}{3}$

$= 2$

Jadi $\left|\frac{6}{3}\right| = \frac{|6|}{|3|} = 2$

Terbukti

6. Jika a > 0, maka $|x| <$ a jika dan hanya jika $-$ a $< x <$ a

   Misal $|x| < 3$ maka $-3 < x < 3$

   - $x = 2$, maka $|2| < 3$ (Benar)
   - $x = 1$, maka $|1| < 3$ (Benar)
   - $x = -1$, maka $|-1| < 3$ (Benar)
   - $x = -2$, maka $|-2| < 3$ (Benar)

   Jadi $|x| < 3 \leftrightarrow -3 < x < 3$

   Terbukti

7. Jika $a > 0$, maka $|x| > a$ jika dan hanya jika $x >$ a atau $x < -$ a

   Misal Misal $|x| > 3$ maka $x < -3$ atau $x > 3$

   - $x = -4$, maka $|-4| > 3$ (Benar)
   - $x = 5$, maka $|5| > 3$ (Benar)

   Jadi $|x| > 3 \leftrightarrow x < -3$ atau $x > 3$

   Terbukti

8. $|x| < |y|$ jika dan hanya jika $x^2 < y^2$

   Misal $|2| < |3|$ maka $2^2 < 3^2$

   Jadi $|2| < |3| \leftrightarrow 2^2 < 3^2$

   Terbukti

9. Jika x dan y bilangan real, maka $|x + y| \leq |x| + |y|$

   Misal $x = 2$ dan $y = -3$

   * Kiri

   $|x + y| = |2 + (-3)|$

   $= |-1|$

   $= 1$

   *kanan

   $|x| + |y| = |2| + |-3|$

   $= 2 + 3$

   $= 5$

Jadi $|2+(-3)| < |2|+|-3|$

Terbukti

10. Jika x dan y bilangan real, maka $|x-y| \geq |x|-|y|$

Misal $x = -3$ dan $y = 2$

*Kiri

$|x-y| = |(-3)-2|$

$= |-5|$

$= 5$

*Kanan

$|x|-|y| = |-3|-|2|$

$= 3-2$

$= 1$

Jadi $|(-3)-2| > |-3|-|2|$

Terbukti

<u>Contoh:</u>

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|2x+3| \geq |4x+5|$

Jawab:

$|2x+3| \geq |4x+5|$

$\Leftrightarrow (2x+3)^2 \geq (4x+5)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+12x+9 \geq 16x^2+40x+25$

$\Leftrightarrow -12x^2-28x-16 \geq 0$

$\Leftrightarrow 3x^2-28x-16 \geq 0$

$\Leftrightarrow (3x+4)(x+1) \leq 0$

$\Leftrightarrow \; x_1 = -\frac{4}{3}$ dan $x_2 = -1$

Maka HP = $\left[-\frac{4}{3}, -1\right]$

DAFTAR PUSTAKA

Irmayanti, K. H. (2021). *Teori Dan Aplikasi Kalkulus Dasar.* Aceh: Yayasan Penerbit Muhammad Zaini.

Nurul Lutvi Azizah, N. A. (2018). *KALKULUS.* Sidoarjo: UMSIDA Press.

Pambudi, Y. D. (2019). *KALKULUS 1.* Pamulang: UNPAM PRESS.

Renilaili. (2021). *Kalkulus Untuk Teknik Industri.* Palembang: PT Awfa Smart Media.

Retno Marsitin, N. R. (2019). *DASAR-DASAR KALKULUS.* Malang: Ediide Infografika (Anggota IKAPI).

Sari Saraswati, I. R. (2020). *KALKULUS DASAR Pendekatan Blended Learning.* Serang: CV. AA. RIZKY.

BAB 3
FUNGSI

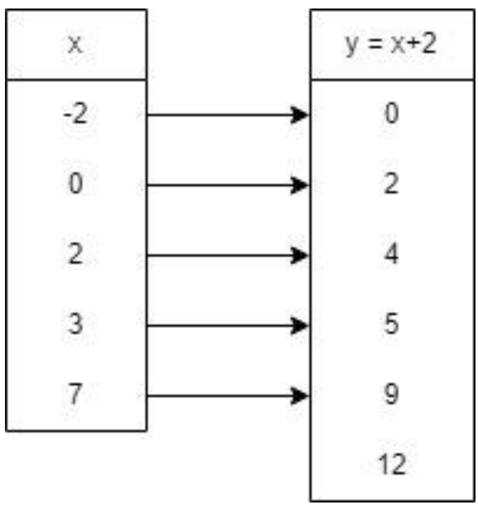
Oleh Rindu Alriavindra Funny

3.1 Definisi Fungsi

Fungsi adalah suatu aturan yang memetakan atau memasangkan satu bilangan ke satu bilangan unik lainnya.

Secara analogi, jika dimasukkan satu angka kemudian melalui aturan yang ditetapkan akan muncul hasilnya.

Sebagai contoh ketika ada fungsi yang menerapkan aturan menambahkan bilangan 2 ke setiap angka.



Gambar 3.1. Fungsi Pemetaan

Ketika diaplikasikan dengan memasukkan angka 3, maka akan muncul angka 5. Ketika dimasukkan angka 7, maka akan muncul angka 9. Ketika dimasukkan angka x, maka akan muncul angka $x + 2$. Secara matematika hal tersebut dapat dituliskan sebagai

$$f(x) = y = x + 2$$

Definisi:

Misalkan A adalah himpunan bilangan-bilangan real dan B adalah himpunan semua bilangan real, dan misalnya f adalah suatu aturan perkaitan antara $x \in A$ dan $y \in B$.

f disebut fungsi dari himpunan A kedalam B jika untuk setiap $x \in A$, dapat ditentukan secara tunggal $y \in B$ yang ditulis dengan $f(x)$.

Suatu fungsi f dari himpunan A kedalam B sering juga didefinisikan sebagai himpunan suatu pasangan bilangan real berurutan yakni $f = \{ (x,y) \mid x \in A, y \in B \}$ dengan

syarat x, tidak boleh muncul dua kali dalam pasangan berurutan (x, y).

3.1.1 Variabel dan Konstanta

Jika $f = \{ (x,y) \mid x \in A, y \in B \}$, $y = f(x) = ax + b$ terdapat beberapa istilah yang perlu diperhatikan.

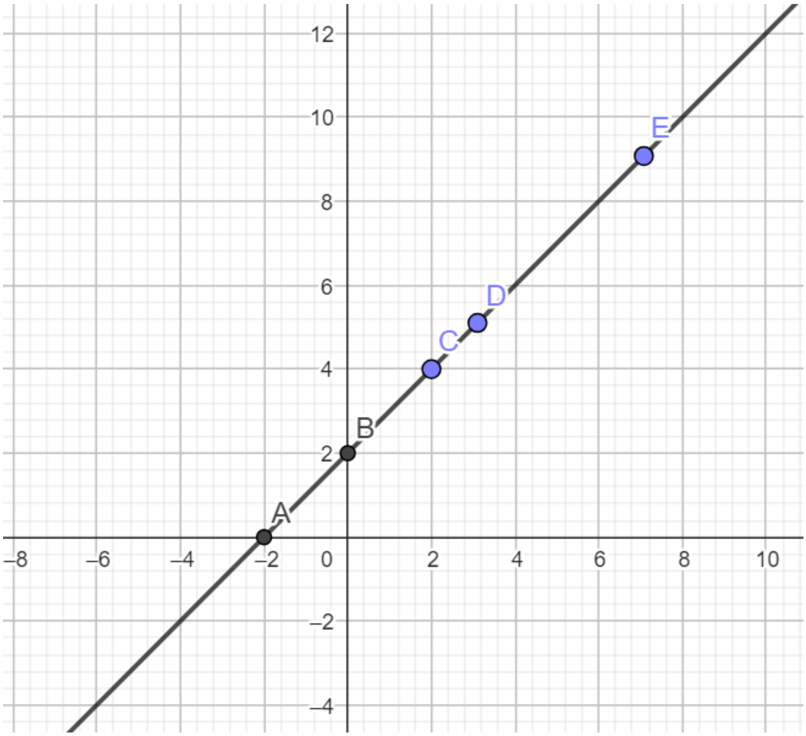
1. x disebut variabel bebas
2. y variabel tak bebas
3. $y = f(x)$ disebut persamaan fungsi f.
4. simbol a dan b menyatakan suatu bilangan tunggal dan disebut suatu konstanta.
5. simbol x menyatakan tiap bilangan suatu himpunan bilangan-bilangan dan disebut variabel.
6. Himpunan A disebut domain / daerah asal dari f
7. Himpunan B disebut kodomain / daerah kawan (tujuan) dari f
8. Himpunan $\{y \mid y = f(x)\}$ disebut range atau daerah nilai fungsi (hasil) f atau y disebut nilai fungsi f di titik x

3.1.2 Grafik Fungsi

Sketsa grafik fungsi dilakukan dengan menggunakan koordinat kartesius.

Sebagai contoh $f = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \ dan \ y = x + 2\}$ dan berdasarkan gambar 3.1, didapatkan himpunan pasangan berurutan seperti berikut :

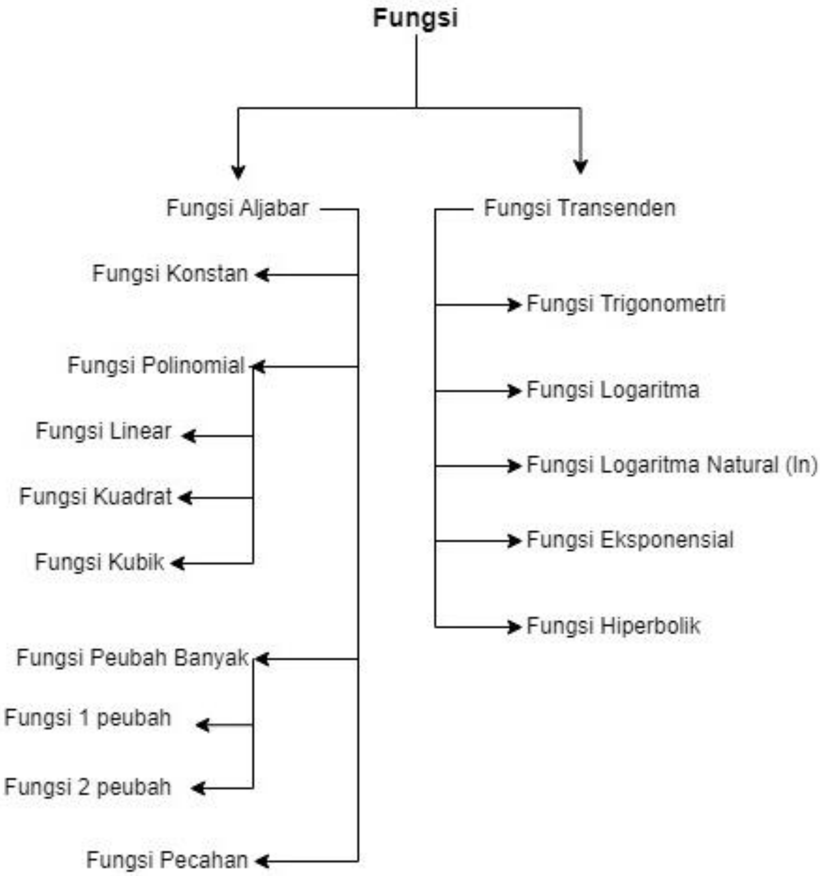
$f = \{A(-2,0), B(0,2), C(2,4), D(3,5)\ dan\ E(7,9)\}$ yang dapat disketsakan kedalam grafik pada sistem koordinat kartesius berikut ini.



Gambar 3.2. Grafik Fungsi $f(x) = x + 2$

3.2 Jenis – Jenis Fungsi

Fungsi mempunyai beberapa jenis berdasarkan bentuknya. Berikut ini silsilah jenis – jenis fungsi.



Gambar 3.3. Bagan klasifikasi fungsi

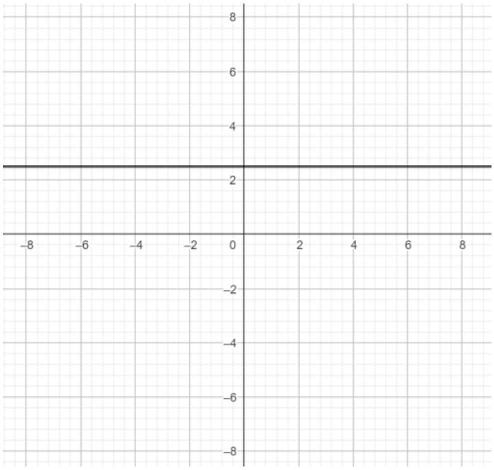
3.2.1 Fungsi Aljabar

Fungsi aljabar adalah suatu fungsi yang dapat menggunakan operasi – operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian pembagian, perpangkatan dan penarikan akar. Operasi aljabar tersebut terdiri atas fungsi konstan $y = k$ dan fungsi polinomial $y = x$. Fungsi aljabar dibagi menjadi 3 bagian yang dibedakan berdasarkan bentuk variabelnya, yaitu fungsi konstan, fungsi polinomial dan fungsi peubah banyak :

1. Fungsi konstan

   Fungsi konstan adalah fungsi yang hanya terdiri dari konstanta atau $y = k, dimana\ k : konstanta$. Contohnya adalah

$f(x) = 2{,}5$ dengan grafik garis lurus pada satu nilai yang sama yaitu $y = 2{,}5$



x	$y = 2{,}5$
-3	2,5
-2	2,5
-1	2,5
0	2,5
1	2,5
	2,5

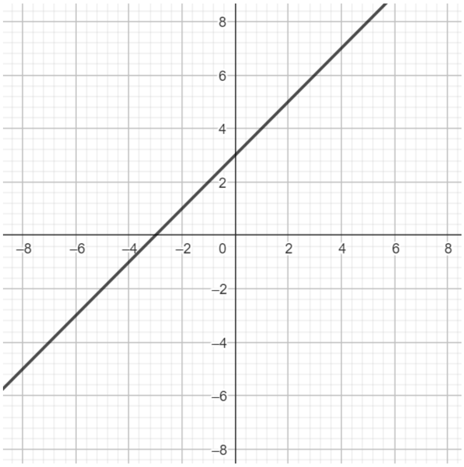
Gambar 3.4. Grafik fungsi $f(x) = 2{,}5$

2. Fungsi Polinom

   Fungsi polinom (suku banyak) memiliki bentuk $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dengan $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ adalah bilanagan real $a_n \neq 0, a_0 = konstanta$ dan n bilangan bulat positif.

   a. Fungsi linear

      Fungsi linear adalah fungsi polinom berderajat 1 yang mempunyai pangkat variabel tertinggi adalah satu. Contohnya adalah $f(x) = x + 3$ dimana gambar grafiknya adalah garis lurus, dengan nilai y mengikuti variabel x yang diberikan seperti tampak pada gambar 3.5 berikut ini.

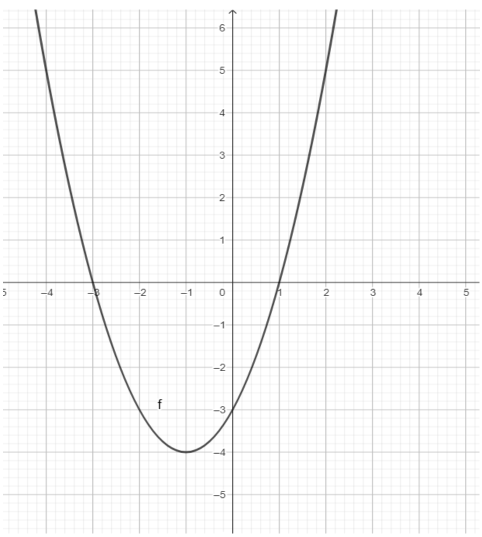


x	$y = x + 3$
-3	0
-2	1
-1	2
0	3
1	4
2	5

Gambar 3.5. Grafik fungsi $f(x) = x + 3$

b. Fungsi kuadrat

Fungsi kuadrat adalah fungsi polinom yang berderajat 2 dimana pangkat tertinggi dari variabelnya adalah dua (x^2 $a.k.a\ kuadrat$) Contohnya adalah $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dengan gambar grafik dibawah ini (gambar 3.6)

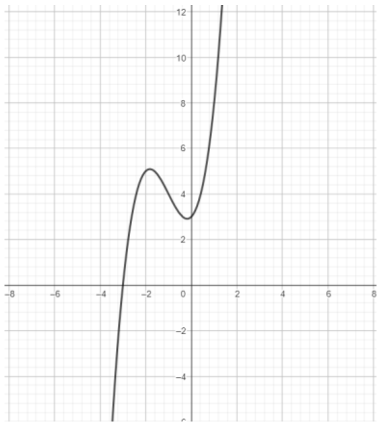


x	$y = x^2 + 2x - 3$
-3	0
-2	-3
-1	-4
0	-3
1	0
2	5

Gambar 3.6. Grafik fungsi $f(x) = x^2 + 2x - 3$

c. Fungsi Kubik

Fungsi kubik adalah fungsi polinom yang berderajat 3 dimana pangkat tertinggi dari variabelnya adalah tiga. Contohnya $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ dengan grafik pada gambar 7 berikut ini :



x	$y = x^3 + 3x^2 + x + 3$
-2	5
-1	4
0	3
1	8
2	25

Gambar 3.7. Grafik fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

Dan masih banyak fungsi polinom berderajat n lainnya.

3. Fungsi Peubah Banyak

Fungsi peubah banyak adalah fungsi yang memasangkan banyak variabel ke sebuah variabel.

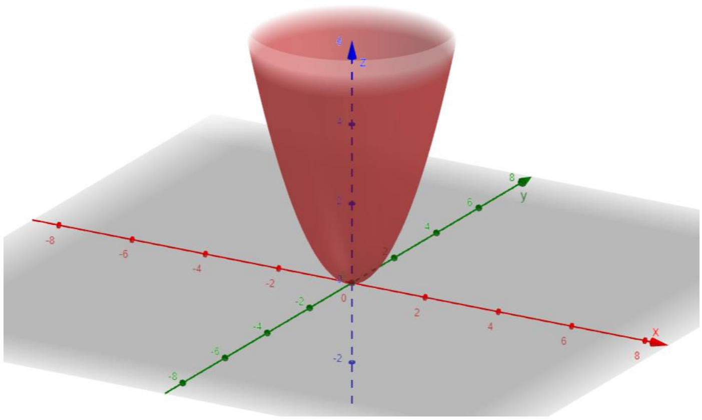
Fungsi aljabar termasuk fungsi satu peubah, yaitu variabel x dipasangkan kepada variabel y.

x	$y = x^2 - 1$
3	8
2	3
1	0
0	-1
-3	8

Sedangkan untuk fungsi dapat dikatakan sebagai fungsi peubah banyak jika minimal ada dua variabel, x dan y, yang dipasangkan kepada z, seperti contoh berikut ini $f(x, y) = z = x^2 + y^2$.

x	y	$z = x^2 + y^2$
3	1	$3^2 + 1^2 = 10$
2	2	$2^2 + 2^2 = 8$
1	3	$1^2 + 3^2 = 10$
0	-4	$0^2 + (-4)^2 = 16$
-3	2	$(-3)^2 + 2^2 = 13$

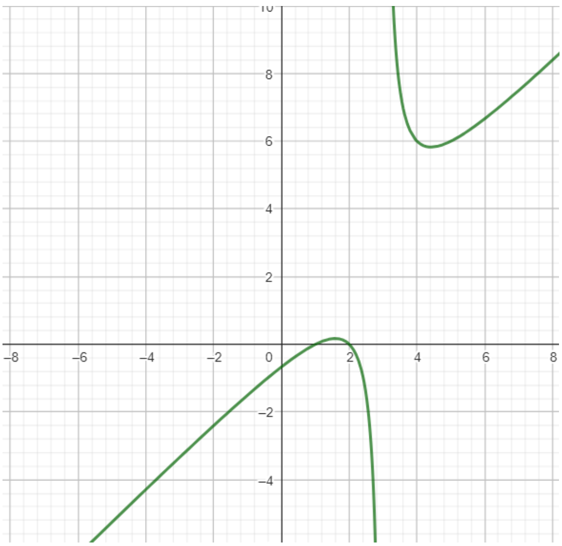
Misalnya fungsi dua peubah, fungsi ini termasuk fungsi peubah banyak. Fungsi dua peubah adalah fungsi yang memasangkan titik-titik pada bidang xy pada z.



Gambar 3.8. Grafik fungsi $f(x, y) = z = x^2 + y^2$

4. Fungsi Pecahan

Fungsi pecahan termasuk fungsi aljabar yang bisa didapatkan dari operasi pembagian. Contohnya $f(x) = \frac{(x^2-3x+2)}{(x-3)}$ akan digambarkan seperti pada gambar 3.9 dibawah ini



x	$y = \frac{(x^2-3x+2)}{(x-3)}$
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{12}{5}$
-1	$-\frac{3}{2}$
0	$-\frac{2}{3}$
1	0
2	0

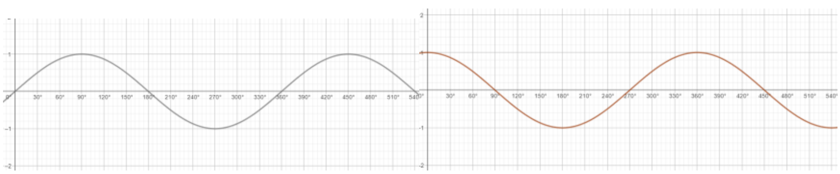
Gambar 3.9. Grafik fungsi $f(x) = \frac{(x^2-3x+2)}{(x-3)}$

3.2.2 Fungsi Transenden

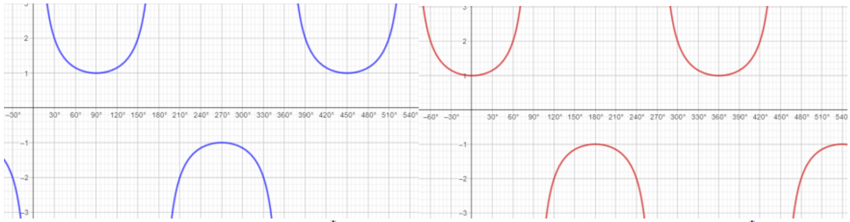
Fungsi transenden adalah fungsi yang bukan fungsi aljabar atu tidak bisa dilakukan operasi aljabar.

1. Fungsi Trigonometri

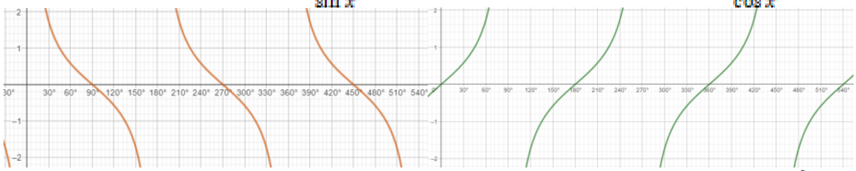
   Fungsi trigonometri adalah suatu fungsi yang grafiknya berulang secara terus menerus dalam periode tertentu. Ada enam fungsi trigonometri, yaitu sinus, cosinus, tangen, secan, cosecan, dan cotangen.



(a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = \cos x$



(c) $f(x) = \text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$ (d) $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$



(e) $f(x) = \tan x$ (f) $f(x) = \text{cotan}\, x = \dfrac{1}{\tan x}$

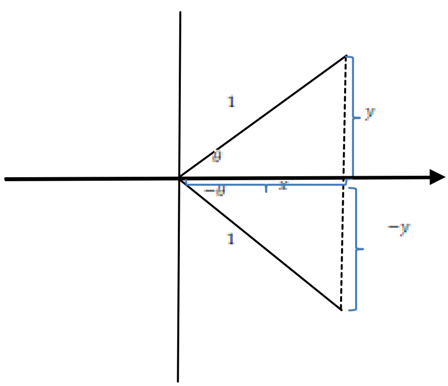
Gambar 3.10. Grafik Fungsi Trigonometri

Pada fungsi sinus, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. Hal ini didapatkan dari identitas trigonometri pada segitiga siku – siku dan sudut negatif. Karena jika sudut positif adalah sudut yang berlawanan dengan arah jarum jam, maka sudut negatif adalah sudut yang searah dengan jarum jam. Misalkan pada lingkaran dengan jari – jari 1 cm pada gambar 11 dibawah ini, akan kita dapatkan fakta bahwa

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y \text{ dan } \sin(-\theta) = \frac{-y}{1} = -y$$

Sehingga, $\sin(-\theta) = -y = -\sin\theta$

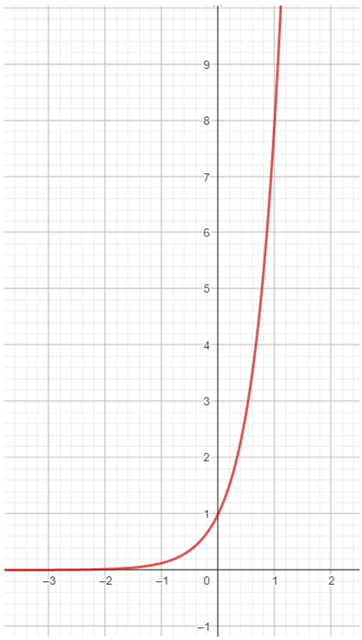
Jadi, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$



Gambar 3.11. Nilai sinus pada lingkaran dengan jari – jari 1 cm.

2. Fungsi Eksponen

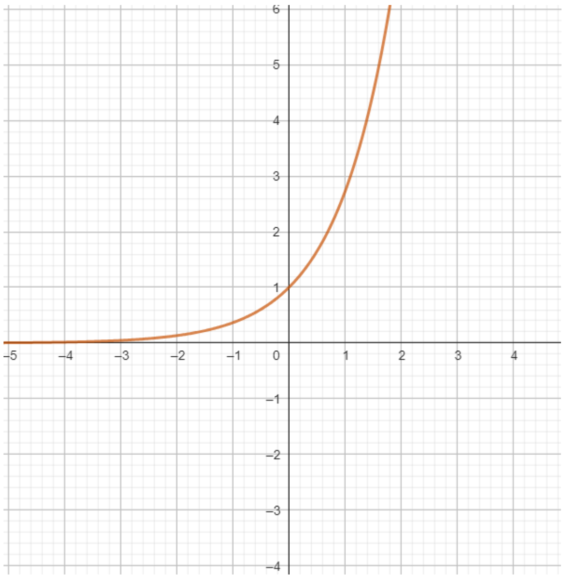
Fungsi eksponen adalah fungsi yang variabel bebasnya menjadi pangkat dari suatu bilangan. Bentuk umumnya adalah $f(x) = a^x, a \neq 0$. Contohnya $f(x) = 8^x$ dengan grafik seperti pada gambar berikut ini



x	$y = 8^x$
-3	$\frac{1}{256}$
-2	$\frac{1}{64}$
-1	$\frac{1}{8}$
0	1
1	8
2	64

Gambar 3.12. Grafik Fungsi $f(x) = 8^x$

Ketika bilangan a diganti dengan bilangan e atau bilangan Euler yaitu bilangan irasional yang bernilai 2,718281828... (dan seterusnya), maka fungsinya menjadi $f(x) = e^x$ dengan grafik dibawah ini.



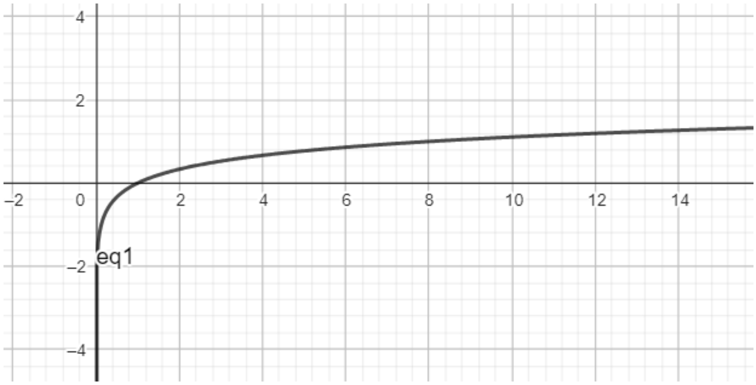
x	$y = e^x$
-3	$\frac{1}{19{,}90\ldots}$
-2	$\frac{1}{7{,}34\ldots}$
-1	$\frac{1}{2{,}71\ldots}$
0	1
1	2,71 ...
2	7,34 ...

Gambar 3.13. Grafik Fungsi $f(x) = e^x$

3. Fungsi Logaritma
   Fungsi logaritma adalah invers dari fungsi eksponen. Berdasarkan hubungan antara logaritma dan eksponen dimana
   ${}^{a}\log b = c \leftrightarrow a^c = b$

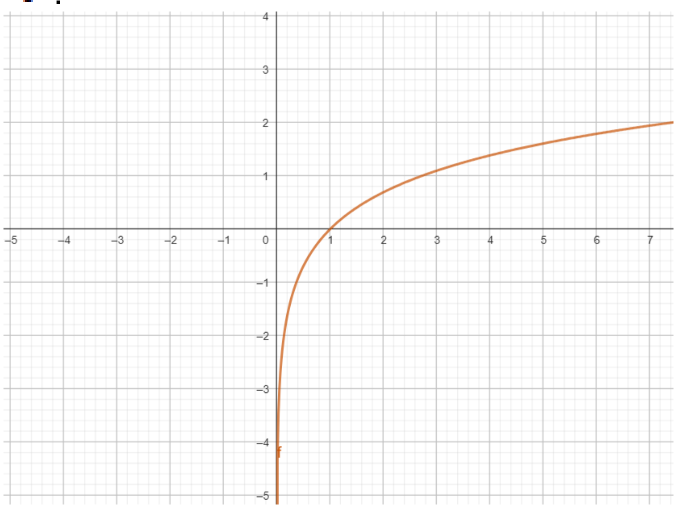
   Definisi Fungsi logaritma
   $$f(x) = {}^{a}\log x$$
   dengan
   a adalah bilangan pokok/basis logaritma $a > 0, a \neq 1$
   x adalah bilangan logaritma/numerus $x > 0$

   Sebagai contoh berdasarkan fungsi pada gambar 9,
   $$y = 8^x \leftrightarrow {}^{8}\log y = x$$
   Sehingga, grafik fungsi $f(x) = {}^{8}\log x$ adalah sebagai berikut



Gambar 3.14. Grafik Fungsi $f(x) = {}^{8}\log x$ dimana kebalikan dari $f(x) = 8^x$

4. Fungsi Logaritma Natural (ln)
   Fungsi logaritma natural adalah fungsi logaritma dengan basis bilangan euler (e), bilangan irasional yang bernilai 2,718281828... (dan seterusnya). Logaritma adalah invers dari fungsi eksponen, sehingga jika logaritma natural adalah logaritma dengan basis bilangan euler maka itu adalah inver dari fungsi eksponen $f(x) = e^x$.



Gambar 3.15. Grafik Fungsi $f(x) = {}^{e}\log x = \ln x$ dimana kebalikan dari $f(x) = e^x$

5. Fungsi Hiperbolik

Fungsi hiperbolik adalah salah satu hasil kombinasi dari fungsi-fungsi eksponen. Awal mula kombinasi fungsi eksponen pada penjumlahan dan pengurangan yaitu:

$$\sinh(x) = f(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh(x) = g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Fungsi $y = e^x$ mempunyai turunan sama dengan dirinya sendiri, yakni $y' = y$. Dengan Aturan Rantai, fungsi $y = e^{-x}$ mempunyai turunan $y' = -y$ sehingga $f'(x) = g(x)$ dan $g'(x) = f(x)$.

Berikut detail turunannya dengan aturan rantai:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$f'(x) = g(x)$$
$$\sinh' x = \cosh x$$

Hal ini mirip dengan turunan fungsi trigonometri, $cos\ x$ dan $sin\ x$, perbedaanya hanya turunan dari $cos\ x$ adalah $-\ sin\ x$).

Selain itu, melalui pembuktian berikut ini dapat diperiksa bahwa $sinh^2 x - cosh^2 x = 1$. Hal ini mirip dengan $sin^2 x + cos^2 x = 1$.

$$g(x)^2 - f(x)^2 = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})\right) - \left(\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-x+x} + e^{x-x} + e^{-2x})\right)$$
$$- \left(\frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-x+x} - e^{x-x} + e^{-2x})\right)$$

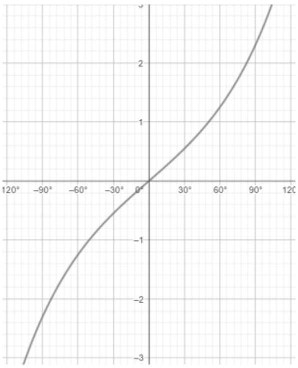
$$= \left(\frac{1}{4}(e^{2x} + e^0 + e^0 + e^{-2x})\right) - \left(\frac{1}{4}(e^{2x} - e^0 - e^0 + e^{-2x})\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}(e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x})\right) - \left(\frac{1}{4}(e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x})\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})\right) - \left(\frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right)$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x})$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x})$$
$$= \frac{1}{4}(2 + 2)$$
$$= \frac{1}{4}(4)$$
$$= 1$$

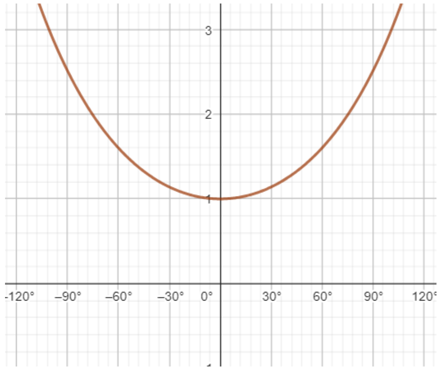
Sehingga didapatkan fakta bahwa $sinh^2 x - cosh^2 x = 1$
Hal ini mirip dengan $sin^2 x + cos^2 x = 1$

Kemiripan lainnya adalah $\cosh(x)$ adalah fungsi genap $(\cosh(-x) = \cosh(x))$ dan $\sinh(x)$ adalah fungsi ganjil $(\sinh(-x) = -\sinh(x))$

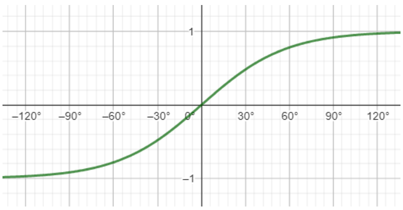
Karena kemiripannya dengan fungsi cosinus dan sinus, kedua fungsi di atas dinamai fungsi cosinus hiperbolik dan sinus hiperbolik, dan dilambangkan dengan cosh x dan sinh x.
Berikut definisi enam fungsi hiperbolik beserta grafiknya:



(a)$f(x) = \sinh x$

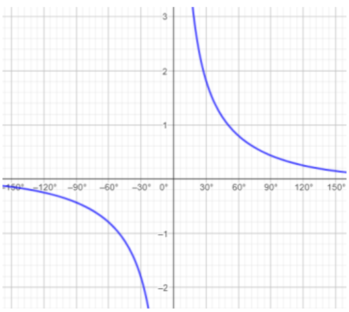


(b)$f(x) = \cosh x$

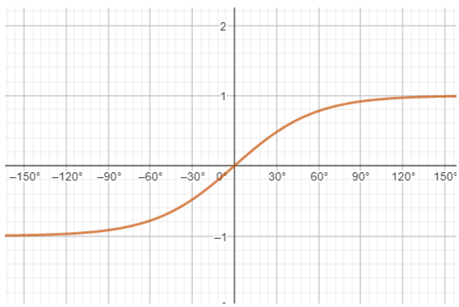


(c)$f(x) = \tanh x$

(d)$f(x) = \operatorname{sech} x$



(e)$f(x) = \operatorname{cosech} x$



(f)$f(x) = \operatorname{cotanh} x$

Gambar 3.16. Grafik Fungsi Hiperbolik

Sifat – sifat fungsi trigonometri juga banyak yang dimiliki oleh fungsi hiperbolik diantaranya, turunannya, fungsi identitasnya dll.

3.3 Fungsi Invers

Suatu fungsi dengan persamaan $y = f(x)$ dikatakan mempunyai fungsi invers yang ditulis dengan f^{-1} jika

$x = f^{-1}(y)$. Domain f sama dengan range f^{-1} dan Domain f^{-1} sama dengan range f.
Jika fungsi f diberikan dengan persamaan
$y = f(x) = 3x + 6$, maka untuk menentukan fungsi inversnya perhatikan ilustrasi dibawah ini.

x	y $f(x) = 3x + 6$
-2	0
-1	3
0	6
1	9
2	12

Maka untuk mencari kebalikan dari fungsi $f(x)$

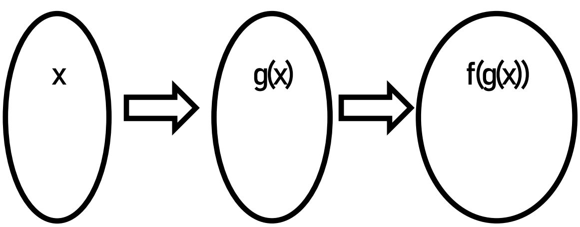
$$y = 3x + 6$$
$$y - 6 = 3x$$
$$\frac{y-6}{3} = x$$

$x = \frac{y-6}{3}$	y
-2	0
-1	3
0	6
1	9
2	12

Oleh karena itu, $\frac{y-6}{3} = y'$ [*y aksen*] atau invers (kebalikan) dari fungsi $f(x) = 3x + 6$.

3.4 Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi atau biasa juga didefinisikan sebagai fungsi didalam fungsi, biasa dinotasikan dengan $fog\,(x) = f(g(x))$ [dibaca: f komposisi g / f bundaran g]. Fungsi komposisi juga dapat dimaknai dengan fungsi yang dipetakan oleh fungsi g(x) kemudian dilanjutkan oleh fungsi f(x). Kenapa disebut fungsi didalam fungsi, karena daerah asal (domain) dari $fog\,(x)$ adalah $g(x)$ yang juga merupakah suatu fungsi dengan domain $x \in \mathbb{R}$.



Gambar 3.17. Fungsi komposisi $fog\,(x) = f(g(x))$

Pada fungsi $gof\ (x) = g(f(x))$, maka domainnya adalah $g(x)$ yang juga merupakah suatu fungsi dengan domain $x \in \mathbb{R}$.

Fungsi lain dapat terbentuk karena proses penggabungan pada proses komposisi, seperti contoh fungsi komposisi berikut ini:

Jika $f(x) = 3x - 2$ dan $g(x) = \frac{x^2}{x-2}$

Maka $fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = 3\left(\frac{x^2}{x-2}\right) - 2$

$$= \frac{3x^2}{x-2} - 2$$

$$= \frac{3x^2}{x-2} - \frac{2(x-2)}{x-2}$$

$$= \frac{3x^2}{x-2} - \frac{2x-4}{x-2}$$

$$fog(x) = \frac{3x^2 - 2x + 4}{x-2}$$

Terdapat 2 cara untuk menentukan nilai dari fungsi komposisi, disubstitusikan ke masing – masing fungsi atau disubtitusikan langsung ke fungsi baru hasil penggabungan.

Contohnya untuk $x = 3$,

I. Substitusikan ke $g(x)$ kemudian $f(x)$.

$g(3) = \frac{3^2}{3-2} = \frac{9}{1} = 9$

kemudian baru disubstitusikan ke $f(x)$

$f(9) = 3(9) - 2 = 27 - 2 = 25$

II. Substitusikan ke $fog(x) = \frac{3x^2 - 2x + 4}{x-2}$

$$fog(3) = \frac{3(3)^2 - 2(3) + 4}{(3) - 2}$$

$$fog(3) = \frac{27 - 6 + 4}{1}$$

$$fog(3) = 25$$

Hasilnya pasti akan sama.

DAFTAR PUSTAKA

Varberg, Purcell, Rigdon dkk. 2007. Calculus 9th edition, Pretince-Hall, United State

Tampomas, Husein. 2006. Fungsi Komposisi Fungsi Invers. Jakarta: Grasindo

Koko, Martono, ed. 1999. Kalkulus. Erlangga

Hendra Gunawan. 2017. Fungsi Trigonometeri Hiperbolik – I. Artikel dalam blog matematika ala Hendra Gunawan, Bermatematika.https://bermatematika.net/2017/10/24/fungsi-trigonometri-hiperbolik-i/comment-page-1/ .

Diktat Kuliah Karbol Akademi Angkatan Udara. 2014. Kalkulus I AE. Akademi Angkatan Udara

Djohan, W. Budhi, W.S. 2017. Diktat Kalkulus I. Institut Teknologi Bandung.

BAB 4
TURUNAN FUNGSI ALJABAR

Oleh Winda Aprianti

4.1 Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$ dengan k adalah konstanta, maka $f'(x) = 0$.
Contoh 1.

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = 5$!
2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \frac{1}{3}$!
3. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = t$!

Penyelesaian:

1. Karena 5 adalah konstanta, maka $f'(x) = 0$
2. Karena $\frac{1}{3}$ adalah konstanta, maka $f'(x) = 0$
3. Karena fungsi dalam x sehingga t adalah konstanta, maka $f'(x) = 0$

Selain $f'(x)$, simbolik yang digunakan untuk menuliskan turunan pertama adalah $D(f(x))$ atau lebih spesifik untuk menyatakan turunan terhadap x adalah $D_x(f(x))$ sehingga:
$D(f(x)) = D(k) = 0$

4.2 Aturan Fungsi Identitas

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$.
Contoh 2.

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = x$!
2. Tentukan turunan pertama dari $f(y) = y$!

Penyelesaian:

1. Karena diturunkan terhadap x, maka $f'(x) = 1$
2. Karena diturunkan terhadap y, maka $f'(y) = 1$

4.3 Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$ dengan n bilangan bulat positif, maka

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Contoh 3.

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = x^2$!
2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = x^3$!
3. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}}$!

Penyelesaian:

1. $n = 2$, maka $f'(x) = nx^{n-1} = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$
2. $n = 3$, maka $f'(x) = nx^{n-1} = 3x^{3-1} = 3x^2$
3. $n = \frac{1}{3}$, maka $f'(x) = nx^{n-1} = 3\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right) = x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

4.4 Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan sehingga dapat disimbolkan $g = kf(x)$, maka $g'(x) = (kf)'(x) = k.f'(x)$.

Contoh 4.

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = 2x$!
2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = 3x^3$!
3. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}}$!

Penyelesaian:

1. $k = 2$ dan $g(x) = x$

   dengan menggunakan aturan fungsi identitas, maka $g'(x) = 1$

   sehingga

   $f'(x) = 2.g'(x) = 2.1$
2. $k = 3$ dan $g(x) = x^3$ dengan menggunakan aturan pangkat maka $g'(x) = nx^{n-1} = 3x^{3-1} = 3x^2$

   sehingga

   $f'(x) = 3.g'(x) = 3.(3\,x^2) = 9x^2$

3. $k = 3$ dan $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ dengan menggunakan aturan pangkat maka $g'(x) = nx^{n-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
sehingga
$f'(x) = 3.g'(x) = 3\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) = x^{-\frac{2}{3}}$

Latihan 1. Gunakan Aturan Konstanta, Fungsi Identitas, Pangkat, dan Kelipatan Konstanta untuk menentukan turunan pertama

1. $f(x) = y$
2. $f(x) = -3$
3. $f(t) = \frac{3}{4}t$
4. $f(x) = -2x$
5. $f(x) = x^{-2}$
6. $f(x) = 4x^2$
7. $f(t) = 8t$
8. $f(t) = 9t^{\frac{2}{3}}$
9. $f(t) = at$
10. $f(t) = at^2$

4.5 Aturan Jumlah dan Selisih

Jika f dan g fungsi yang terdiferensialkan, maka
Aturan Jumlah: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Aturan Selisih: $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
Contoh 5.
Tentukan turunan pertama dari y terhadap x dengan:

1. $y = 15x^2 + 30$
2. $y = 3x^3 - 7x - 3$
3. $y = \frac{3}{x} + \frac{2}{7x^7} - 5x + \frac{1}{2}$

Penyelesaian:

1. Misalkan: $f(x) = 15x^2 \rightarrow f'(x) = 15(2x) = 30x$
   $g(x) = 30\text{x} \rightarrow g'(x) = 0$

maka

$y' = f'(x) + g'(x) = 30x + 0 = 30$

2. Misalkan: $f(x) = 3x^3 \rightarrow f'(x) = 3(3x^2) = 9x^2$
   $g(x) = 7x \rightarrow g'(x) = 7$
   $h(x) = 3 \rightarrow h'(x) = 0$

   maka

   $y' = f'(x) - g'(x) - h'(x) = 9x^2 - 7 - 0 = 9x^2 - 7$

3. Misalkan: $a(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1} \rightarrow a'(x) = 3(-x^{-2}) = -3x^{-2}$
   $b(x) = \frac{2}{7x^7} = \frac{2}{7}x^{-7} \rightarrow b'(x) = \frac{2}{7}(-7x^{-8}) = -2x^{-8}$
   $c(x) = 5x \rightarrow c'(x) = 5$
   $d(x) = \frac{1}{2} \rightarrow d'(x) = 0$

   maka

   $y' = a'(x) + b'(x) - c'(x) + d'(x) = -3x^{-2} - 2x^{-8} - 5$

Latihan 2. Gunakan Aturan Jumlah dan Selisih untuk menentukan turunan pertama dari

1. $y = x - 3$
2. $y = -3x^2 + 2x - 1$
3. $f(t) = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t$
4. $f(x) = \frac{-2}{x} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}$
5. $f(x) = x^{-2} + yx$
6. $f(x) = 4x^2 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^6}$
7. $f(t) = 8t - 3 - 4t^{-1}$
8. $f(t) = 9t^{\frac{2}{3}} + 4t^{-\frac{1}{2}}$
9. $f(t) = at - 3$
10. $f(t) = \sqrt{2}\, t^2 - 3t$

4.6 Aturan Hasil Kali

Jika f dan g fungsi yang terdiferensialkan, maka

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Contoh 6.

Gunakan aturan hasil kali untuk menentukan turunan pertama dari $(2x^3 - 3)(3x^2 + 2x)$!

Penyelesaian:
Cara I:
Dengan Aturan Hasil Kali
Misal: $f(x) = 2x^3 - 3 \rightarrow f'(x) = 6x^2$
$g(x) = 3x^2 + 2x \rightarrow g'(x) = 6x + 2$
maka
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$= (6x^2)(3x^2 + 2x) + (2x^3 - 3)(6x + 2)$
$= (18x^4 + 12x^3) + (12x^4 + 4x^3 - 18x - 6)$
$= 30x^4 + 16x^3 - 18x - 6$
Cara II:
Digunakan untuk memeriksa pada Cara I
$f(x) = (2x^3 - 3)(3x^2 + 2x) = 6x^5 + 4x^4 - 9x^2 - 6x$
$f'(x) = 30x^4 + 16x^3 - 18x - 6$
Terbukti hasilnya sama, sehingga untuk turunan pertama dari perkalian fungsi-fungsi dapat dicari menggunakan Aturan Hasil Kali.

Contoh 7.
Gunakan aturan hasil kali untuk menentukan turunan pertama dari:
1. $(7x - 2)(2 - x)$
2. $\left(\frac{1}{4}x^4 + 2x\right)(4x^3 - 3)$
3. $\left(\frac{2}{x} - 4x\right)(x - x^2)$

Penyelesaian:
1. Dengan Aturan Hasil Kali
   Misal: $f(x) = 7x - 2 \rightarrow f'(x) = 7$
   $g(x) = 2 - x \rightarrow g'(x) = -1$
   maka
   $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
   $= (7)(2 - x) + (7x - 2)(-1)$
   $= 14 - 7x - 7x + 2$
   $= -14x + 16$
2. Dengan Aturan Hasil Kali
   Misal: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x \rightarrow f'(x) = x^3 + 2$
   $g(x) = 4x^3 - 3 \rightarrow g'(x) = 12x^2$

maka

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$= (x^3 + 2)(4x^3 - 3) + \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x\right)(12x^2)$

$= 4x^6 - 3x^3 + 8x^3 - 6 + 3x^6 + 24x^3$

$= 7x^6 + 29x^3 - 6$

3. Dengan Aturan Hasil Kali

Misal: $f(x) = \frac{2}{x} - 4x = 2x^{-1} - 4x \rightarrow f'(x) = -2x^{-2} - 4$

$g(x) = x - x^2 \rightarrow g'(x) = 1 - 2x$

maka

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$= (-2x^{-2} - 4)(x - x^2) + (2x^{-1} - 4x)(1 - 2x)$

$= -2x^{-1} + 2 - 4x + 4x^2 + 2x^{-1} - 4 - 4x + 8x^2$

$= 12x^2 - 8x - 2,$

4.7 Aturan Hasil Bagi

Jika f dan g fungsi yang terdiferensialkan, maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Contoh 8.

Gunakan aturan hasil bagi untuk menentukan turunan pertama dari: $\frac{(7x-2)}{(2-x^2)}$!

Penyelesaian:

Cara I.

Misal: $f(x) = 7x - 2 \rightarrow f'(x) = 7$

$g(x) = 2 - x^2 \rightarrow g'(x) = -2x$

maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{(7)(2 - x^2) - (7x - 2)(-2x)}{(2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{(14 - 7x^2) - (-14x^2 + 4x)}{(2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{14 - 7x^2 + 14x^2 - 4x}{(2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{7x^2 - 4x - 14}{(2 - x^2)^2}$$

Cara II.

Ingat materi pada subbab 1.1 bahwa simbolik untuk turunan dapat menggunakan f' atau D.

$$D\left(\frac{7x - 2}{2 - x^2}\right) = \frac{D(7x - 2) \cdot (2 - x^2) + (7x - 2) \cdot D(2 - x^2)}{(2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{(7)(2 - x^2) + (7x - 2)(-2x)}{(2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{(14 - 7x^2) - (-14x^2 + 4x)}{(2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{14 - 7x^2 + 14x^2 - 4x}{(2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{7x^2 - 4x - 14}{(2 - x^2)^2}$$

Contoh 9.

Cari Dy jika diketahui:

1. $y = \frac{2x}{x^3+1} + 3x$
2. $y = \frac{3}{x^5-2} + \frac{2}{x}$

Penyelesaian:

1. $Dy = D\left(\frac{2x}{x^3+1}\right) + D(3x)$

$$= \frac{D(2x) \cdot (x^3 + 1) + (2x) \cdot D(x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^2} + 3$$

$$= \frac{2(x^3 + 1) + (2x)(3x)}{(x^3 + 1)^2} + 3$$

$$= \frac{2x^3 + 2 + 6x^2}{(x^3 + 1)^2} + 3$$

2. $Dy = D\left(\frac{3}{x^5-2}\right) + D\left(\frac{2}{x}\right)$

$$= \frac{D(3) \cdot (x^5 - 2) + (3) \cdot D(x^5 - 2)}{(x^5 - 2)^2} + \frac{D(2) \cdot (x) + (2) \cdot D(x)}{x^2}$$

$$= \frac{(0)(x^5-2)+3(5x^4)}{(x^5-2)^2} + \frac{(0)(1)+(1)(1)}{x^2}$$
$$= \frac{15x^4}{(x^5-2)^2} + \frac{1}{x^2}$$

Latihan 3. Gunakan Aturan Hasil Kali dan Hasil bagi untuk menentukan turunan pertama terhadap x dari

1. $y = x(x-2)$
2. $y = x^2(x^3+1)$
3. $y = (2x-3)(x^2+2)$
4. $y = (x^7+2)(x^3-5x)$
5. $y = (x^3+4)(x^2-3x+2)$
6. $y = \frac{1}{x+3}$
7. $y = \frac{x^3+5}{x-1}$
8. $y = \frac{3x+4}{x^2-2}$
9. $y = \frac{2x^2-3x+2}{x^2+1}$
10. $y = \frac{x^3+2}{x-1} + \frac{3}{x-5}$

4.8 Aturan Rantai

Jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ sehingga $y = f(g(x))$, maka berlaku aturan rantai yakni

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

atau

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh 10.

Tentukan turunan dari $y = (2x+1)^2$!

Penyelesaian:

Cara I.

Misal: $u = 2x + 1 \rightarrow u' = D_x u = 2$
sehingga $y = u^2 \rightarrow y' = D_u y = 2u$
maka menggunakan aturan rantai:
$$y' = D_x y = D_u y \cdot D_x u$$
$$= 2u \cdot 2 = 4u = 4(2x + 1) = 8x + 4$$
Cara II.
$$y = (2x + 1)^2 = (2x + 1)(2x + 1) = 4x^2 + 2x + 2x + 1$$
$$= 4x^2 + 4x + 1$$
$$y' = 8x + 4$$
Hasil dari Cara I dan Cara II menunjukkan turunan pertama yang sama.

Contoh 11.
Tentukan turunan pertama y terhadap x menggunakan aturan rantai:
1. $y = (3x - 7)^{13}$
2. $y = (2x^4 + 3x^2 - 8x + 3)^{-3}$
3. $y = \frac{2}{(3x^5 - 5x^3 + x - 2)^5}$

Penyelesaian:
1. Misal $u = 3x - 7 \rightarrow u' = D_x u = 3$
   sehingga $y = u^{13} \rightarrow y' = D_u y = 13u^{12}$
   maka menggunakan aturan rantai:
   $$y' = D_x y = D_u y \cdot D_x u$$
   $$= 13u^{12} \cdot 3 = 39u^{12} = 39(3x - 7)^{12}$$
2. Misal $u = 2x^4 + 3x^2 - 8x + 3 \rightarrow u' = D_x u = 8x^3 + 6x - 8$
   sehingga $y = u^{-3} \rightarrow y' = D_u y = -3u^{-2}$
   maka menggunakan aturan rantai:
   $$y' = D_x y = D_u y \cdot D_x u$$
   $$= -3u^{-2} \cdot (8x^3 + 6x - 8) = u^{-2}(-24x^3 - 18x + 24)$$
   $$= (2x^4 + 3x^2 - 8x + 3)^{-2}(-24x^3 - 18x + 24)$$
   $$= \frac{-24x^3 - 18x + 24}{(2x^4 + 3x^2 - 8x + 3)^2}$$

Contoh 12.

Tentukan turunan pertama y terhadap x menggunakan aturan rantai dan aturan hasil kali atau aturan hasil bagi:

1. $y = \frac{2x}{(3x^5-5x^2+x-2)^5}$
2. $y = \left(\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{2}\right)(x^2-1)^3$
3. $y = \left(\frac{2x^2-3}{x-2}\right)^3$

Penyelesaian:

1. Misal: $f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2$

$g(x) = (3x^5 - 5x^2 + x - 2)^5$

Untuk menentukan $g'(x) = D_x g$ digunakan aturan rantai:

Misal: $u = 3x^5 - 5x^2 + x - 2$

$u' = D_x u = 15x^4 - 10x + 1$

sehingga $g = u^5 \Rightarrow g' = D_u g = 5u^4$

menggunakan aturan rantai:

$$\begin{aligned} g' &= D_x g = D_u g \cdot D_x u \\ &= 5u^4 \cdot (15x^4 - 10x + 1) = u^4(75x^4 - 50x + 5) \\ &= (75x^4 - 50x + 5)(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4 \end{aligned}$$

maka:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

dengan

$$\begin{aligned} f'(x)\cdot g(x) &= 2\cdot(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^5 \\ &= 2(3x^5 - 5x^2 + x - 2)(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4 \\ &= (6x^5 - 10x^2 + 2x - 4)(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g'(x) &= (2x)\left((75x^4 - 50x + 5)(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4\right) \\ &= (150x^5 - 100x^2 + 10x)(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x) \\ &= (6x^5 - 10x^2 + 2x - 4)(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4 \\ &\quad -(150x^5 - 100x^2 + 10x)(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4 \\ &= [(6x^5 - 10x^2 + 2x - 4) - (150x^5 - 100x^2 + 10x)] \\ &\quad (3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4 \\ &= (-144x^5 + 90x^2 - 8x)(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^2(x) &= ((3x^5 - 5x^2 + x - 2)^5)^2 \\ &= (3x^5 - 5x^2 + x - 2)^{10} \end{aligned}$$

diperoleh:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(-144x^5 + 90x^2 - 8x)(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^4}{(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^{10}}$$

$$= \frac{(-144x^5 + 90x^2 - 8x)}{(3x^5 - 5x^2 + x - 2)^6}$$

2. Misal: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{2} \rightarrow f'(x) = x^2 - 1$

   $g(x) = (x^2 - 1)^3$

   Untuk menentukan $g'(x) = D_x g$ digunakan aturan rantai:

   Misal:

   $u = x^2 - 1 \rightarrow u' = D_x u = 2x$

   sehingga $g = u^3 \rightarrow g' = D_u g = 3u^2$

   menggunakan aturan rantai:

   $g' = D_x g = D_u g \cdot D_x u$

   $= 3u^2 \cdot (2x) = 6x(x^2 - 1)^2$

   maka:

   $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

   $= (x^2 - 1)((x^2 - 1)^3) + \left(\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{2}\right)(6x(x^2 - 1)^2)$

   $= (x^2 - 1)^4 + (2x^4 - 6x^2 + 3x)(x^2 - 1)^2$

   $= [(x^2 - 1)^2 + (2x^4 - 6x^2 + 3x)](x^2 - 1)^2$

   $= [(x^2 - 1)(x^2 - 1) + (2x^4 - 6x^2 + 3x)](x^2 - 1)^2$

   $= (x^4 - x^2 - x^2 + 1 + 2x^4 - 6x^2 + 3x)(x^2 - 1)^2$

   $= (3x^4 - 8x^2 + 3x + 1)(x^2 - 1)^2$

3. Misal: $u = \frac{2x^2-3}{x-2} \rightarrow u' = D_x u$

   karena u berbentuk $\frac{f}{g}$, maka

   $$u' = D_x u = \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

   dengan

   $f = 2x^2 - 3 \rightarrow f' = 4x$

   $g = x - 2 \rightarrow g' = 1$

sehingga

$$u' = D_x u = \frac{(4x)(x-2) - (2x^2-3)(1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 8x - 2x^2 + 3}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 8x + 3}{(x-2)^2}$$

$$y = u^3 \rightarrow y' = D_u y = 3u^2$$

menggunakan aturan rantai:

$$y' = D_x y = D_u y \cdot D_x u$$

$$= 3u^2 \cdot \left(\frac{2x^2 - 8x + 3}{(x-2)^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{2x^2-3}{x-2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2x^2 - 8x + 3}{(x-2)^2}\right)$$

$$= \frac{3(2x^2-3)^2(2x^2-8x+3)}{(x-2)^4}$$

Latihan 4. Tentukan turunan pertama y terhadap x dari

1. $y = (5x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x - 8)(x^2 - 5x + 3)^3$
2. $y = \frac{3x}{(x^3 - 2x + 5)^4}$
3. $y = \frac{7}{(2x^3 - 3x)^3} - \frac{(3x^2-3)^5}{2x}$
4. $y = \left(\frac{2x^4 - 3x^3 - 7}{x^2 - 3}\right)^4$
5. $y = \left(\frac{x}{x^2-3} + \frac{7}{x^3-3}\right)^4$

4.9 Turunan Tingkat Tinggi

Sebuah fungsi hasil operasi pendiferensialan disimbolkan dengan f' disebut sebagai turunan pertama. Operasi pendiferensialan dari f' akan menghasilkan f'' dan disebut sebagai turunan kedua dari f. Hal ini dapat dilakukan seterusnya.

Turunan	Penulisan f'	Penulisan y'	Penulisan D
Pertama	$f'(x)$	y'	$D_x y$
Kedua	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$
Ketiga	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$
Keempat	$f''''(x)$	y''''	$D_x^4 y$
Kelima	$f^{(5)}(x)$	$y^{(5)}$	$D_x^5 y$
⋮	⋮	⋮	⋮
ke-n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$

Contoh 13.

Tentukan f', f'', dan f''' dari $f(x) = \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x - 7$

Penyelesaian:

$$f' = \frac{3}{18}x^2 + \frac{2}{4}x + 3 = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

$$f'' = \frac{2}{6}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$$

$$f''' = \frac{1}{3}$$

DAFTAR PUSTAKA

Purcell, E.J. and Varberg, D. 1984. Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I Edisi 4.

Sudaryono, Rahardja, U., and Mulyanta, E.S. 2010. Langkah Mudah Belajar Kalkulus for IT. Yogyakarta: Penerbit Andi.

Varberg, D., Purcell, E.J., and Rigdon, S.E. 2007. Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2.

BAB 5
KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN

Oleh Veri Julianto

5.1 Kemonotonan

5.1.1 Pengantar konsep kemonotonan dan kecekungan

Pada bidang kalkulus, terdapat dua konsep penting yang sering digunakan dalam menganalisis perilaku fungsi matematika, yaitu kemonotonan dan kecekungan. Kedua konsep ini memberikan pemahaman yang dalam tentang bagaimana suatu fungsi berubah seiring dengan perubahan nilai variabelnya. Dalam bab ini, kita akan menjelajahi kedua konsep tersebut secara mendalam, mulai dari definisi hingga penerapannya dalam pemecahan masalah kalkulus.

Konsep Kemonotonan

Kemonotonan adalah sifat dari sebuah fungsi yang menunjukkan kecenderungan peningkatan atau penurunan nilai fungsi sepanjang domain tertentu. Dengan kata lain, fungsi dikatakan monoton naik jika nilainya meningkat sepanjang domain, dan fungsi dikatakan monoton turun jika nilainya menurun sepanjang domain.

Dalam menganalisis kemonotonan sebuah fungsi, uji turun pertama (*first derivative test*) sering digunakan sebagai alat utama. Uji turun pertama memungkinkan kita untuk menentukan di mana fungsi tersebut monoton naik atau monoton turun dengan memeriksa tanda turunan pertamanya.

Konsep Kecekungan

Kecekungan adalah sifat dari sebuah fungsi yang menunjukkan apakah grafik fungsi tersebut cembung ke atas atau ke bawah. Jika grafik cembung ke atas, kita sebut ke atas (*concave up*), dan jika grafik cembung ke bawah, kita sebut ke bawah (*concave down*).

Dalam menganalisis kecekungan sebuah fungsi, uji turun kedua (*second derivative test*) digunakan sebagai alat utama. Uji turun kedua memungkinkan kita untuk menentukan di mana fungsi tersebut cembung ke atas atau ke bawah dengan memeriksa tanda turunan keduanya.

Keduanya, kemonotonan dan kecekungan, memiliki peran penting dalam menganalisis sifat-sifat fungsi matematika, termasuk menemukan ekstremum lokal, titik infleksi (titik balik), dan membuat estimasi tentang perilaku fungsi dalam interval tertentu.

Dalam bab ini, kita akan mengeksplorasi lebih lanjut tentang bagaimana kedua konsep ini diterapkan dalam pemecahan masalah kalkulus dan bagaimana mereka membantu kita memahami sifat-sifat fungsi dengan lebih baik.

5.1.2 Pentingnya pemahaman konsep kemonotonan dan kecekungan dalam analisis Fungsi

Kemonotonan dan kecekungan adalah dua konsep yang tidak dapat dipisahkan dalam analisis fungsi matematika. Kedua konsep ini memberikan wawasan yang mendalam tentang bagaimana suatu fungsi berubah dan berkembang sepanjang domainnya. Dalam konteks analisis fungsi, pemahaman yang kuat tentang kemonotonan dan kecekungan sangatlah penting karena memberikan landasan untuk penemuan titik ekstrim, titik infleksi (titik balik), serta perilaku keseluruhan fungsi.

Kemonotonan sebuah fungsi memberikan informasi tentang arah perubahan nilai fungsi terhadap perubahan nilai variabel independen. Dengan mengetahui apakah suatu fungsi monoton naik atau turun dalam suatu interval, kita dapat membuat kesimpulan tentang kecenderungan umum fungsi tersebut. Sementara itu, kecekungan sebuah fungsi memberikan informasi tentang bagaimana grafik fungsi tersebut membentuk kurva. Grafik yang cembung ke atas menunjukkan peningkatan yang semakin tajam, sementara grafik yang cembung ke bawah menunjukkan penurunan yang semakin tajam.

Pentingnya pemahaman konsep kemonotonan dan kecekungan tidak hanya terletak pada analisis matematika murni, tetapi juga dalam berbagai bidang ilmu lainnya seperti ekonomi, fisika, dan teknik. Dalam ekonomi, misalnya, pemahaman tentang bagaimana fungsi permintaan atau penawaran berubah seiring perubahan harga sangatlah penting dalam pengambilan keputusan bisnis.

Dalam konteks pendidikan, pemahaman konsep kemonotonan dan kecekungan juga memberikan landasan yang kokoh bagi siswa untuk memahami konsep-konsep yang lebih lanjut dalam matematika, seperti turunan dan integral. Oleh karena itu, penyajian yang jelas dan mendalam tentang kedua konsep ini dalam pembelajaran kalkulus tidak hanya memberikan manfaat langsung bagi siswa, tetapi juga membekali mereka dengan dasar yang kuat untuk memahami konsep-konsep matematika yang lebih kompleks di masa depan.

5.2 Kemonotonan

Kemonotonan adalah sifat dari sebuah fungsi yang menunjukkan kecenderungan peningkatan atau penurunan nilai fungsi sepanjang domain tertentu. Memahami konsep kemonotonan sangat penting dalam analisis fungsi matematika karena memberikan wawasan tentang bagaimana suatu fungsi berubah seiring perubahan nilai variabelnya. Dalam pembahasan ini, kita akan menjelaskan konsep kemonotonan dan memberikan beberapa contoh soal beserta jawabannya untuk membantu memperkuat pemahaman kita.

Konsep kemonotonan

Sebuah fungsi $f(x)$ dikatakan monoton naik dalam interval $[a, b]$ jika untuk setiap x_1 dan x_2 dalam interval $[a, b]$ dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) \leq f(x_2)$. Sebaliknya, sebuah fungsi $f(x)$ dikatakan monoton turun dalam interval $[a, b]$ jika untuk setiap $x_1$dan x_2 dalam iterval $[a, b]$ dengan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Dalam analisis kemonotonan, uji turun pertama (*first derivative test*) sering digunakan. Untuk menentukan apakah sebuah fungsi monoton naik atau monoton turun pada suatu interval, kita dapat mengambil turunan pertama fungsi tersebut dan memeriksa tanda-tanda turunan pada interval tersebut. Dalam menentukan selang fungsi monoton naik dan turun di gunakan konsep gardien dari suatu garis yang di definisikan sebagai tangen sudut α yang dibentuk dari garis tersebut dengan sumbu X positif, $m = \tan \alpha$. Bila sudut lancip $\left(\alpha < \frac{1}{2}\pi\right)$ maka $m > 0$ dan $m < 0$ untuk $\left(\alpha > \frac{1}{2}\pi\right)$. Karena gradien garis singgung suatu kurva $y = f(x)$ dititik (x, y) diberikan dengan $m = f'(x)$ dan selang fungsi naik dan turun berturut-turut ditentukan dari nilai gradiennya, maka selang atau selang dimana fungsi monoton diberikan berikut:

1. Fungsi $f(x)$ naik apabila $f'(x) > 0$
2. Fungsi $f(x)$ turun apabila $f'(x) < 0$

Contoh 1 :

Tentungan selang fungsi naik dan fungsi turundari fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$.

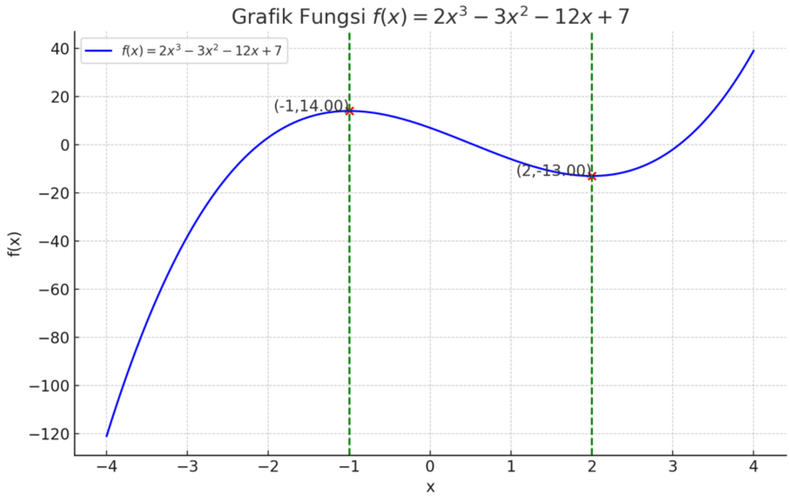
Penyelesaian:

Langkah 1 : Mulai dengan mencari turunan f

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$
$$= 6(x + 1)(x - 2)$$

Dari hasil persamaan diatas maka persamaan memiliki titik-titik pemisah yaitu -1 dan 2. Maka berdasarkan titik tersebut kedua titik tersebut membagi sumbu-x atas tiga selang yaitu $(-\infty, -1)$, $(-1,2)$ dan $(2, \infty)$.

Langkah 2 : Dengan menggunakan titik-titik -2, 0 dan 3, dapat disimpulkan bahwa untuk $f'(x) > 0$, pada daerah yang pertama dan terakhir dari selang-selang ini dan untuk $f'(x) < 0$ pada selang tengah. Jadi berdasarkan konsep kecekungan maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f dinyatakan naik pada $(-\infty, -1)$ dan $[2, \infty)$, fungsi f dinyatakan turun pada $[-1,2]$.



5.3 Kecekungan

Kecekungan (*Concavity*) dalam kalkulus mengacu pada sifat kurva yang menunjukkan arah kelengkungan suatu fungsi. Ini sangat berguna untuk memahami bagaimana fungsi berubah dan untuk mengidentifikasi titik belok (inflection points) dalam suatu grafik.

Concave Up **(Cekung ke Atas):** Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan cekung ke atas pada interval tertentu jika kurva grafiknya berada di atas garis tangen pada setiap titik dalam interval tersebut. Secara geometris, ini berarti bahwa kelengkungan kurva mengarah ke atas. Dalam bentuk matematis di tuliskan : $f''(x) > 0$ untuk semua x pada interval tersebut.

Concave Down **(Cekung ke Bawah):** Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan cekung ke bawah pada interval tertentu jika kurva grafiknya berada di bawah garis tangen pada setiap titik dalam interval tersebut. Ini menunjukkan bahwa kelengkungan kurva mengarah ke bawah. Dalam bentuk matematis di tuliskan : $f''(x) < 0$ untuk semua x pada interval tersebut.

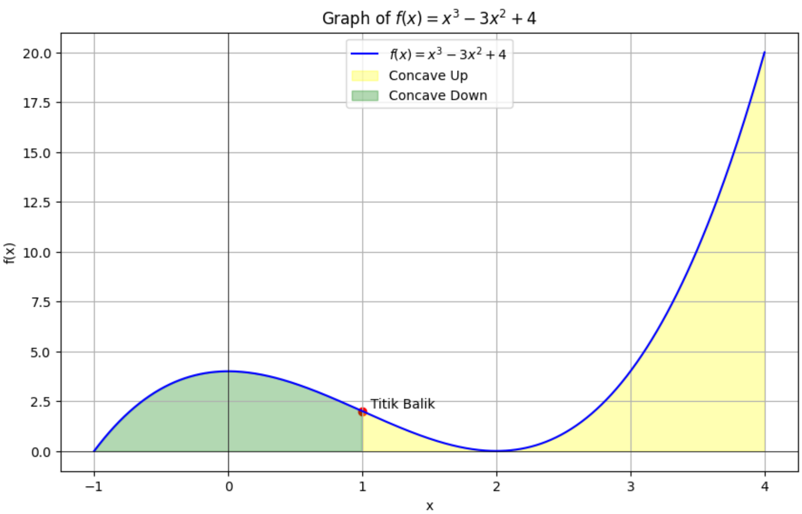
Titik belok/balik adalah titik di mana suatu fungsi berubah dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau sebaliknya. Pada titik ini, turunan kedua dari fungsi, $f''(x)$berubah tanda. Jika $f''(x) = 0$ dan terjadi perubahan tanda di sekitar x, maka x adalah titik belok.

Contoh 3 :

Tentukan interval kecekungan dan titik belok dari fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Jawaban :

1. Hitung turunan pertama
   $f'(x) = 3x^2 - 6x$
2. Hitung turunan kedua
   $f''(x) = 6x - 6$
3. Tentukan tanda dari $f''(x)$:
   - Untuk $x > 1, f''(x) > 0$, sehingga $f(x)$ cekung keatas.
   - Untuk $x < 1, f''(x) < 0$, sehingga $f(x)$ cekung kebawah.
4. Titik belok terjadi ketika $f''(x) = 0$, yaitu ketika $x = 1$



5.4 Penerapan dan Pemecahan Masalah

Suatu perusahaan memproduksi dan menjual produk dengan biaya produksi tetap $C(x) = 5000$ dan biaya variabel per unit $2x + 10$ di mana x adalah jumlah unit yang diproduksi dan dijual. Harga jual per unit produk adalah $P(x) = 30 - 0{,}5x$. Tentukan:

1. Tentukan fungsi pendapatan $R(x)$ dari penjualan x unit produk.
2. Tentukan fungsi laba $L(x)$dari penjualan x unit produk.
3. Tentukan interval di mana fungsi laba $L(x)$ bersifat naik dan turun.
4. Tentukan interval di mana grafik fungsi laba $L(x)$ cekung ke atas (konkaf) atau cekung ke bawah (cembung).
5. Berapa unit produk yang harus diproduksi dan dijual untuk memaksimalkan laba?

Pembahsaan:

Fungsi Pendapatan $R(x)$: Pendapatan adalah hasil perkalian jumlah unit yang dijual dengan harga per unit.

$R(x) = x.P(x) = x(300 - 0{,}5) = 300 - 0{,}5x^2$

Fungsi Laba $L(x)$. Laba adalah selisih antara pendapatan dan total biaya produksi (biaya tetap ditambah biaya variabel).

$L(x) = R(x) - \big(C(x) + c(x)\big)$

$L(x) = (300x - 0{,}5x^2) - \big(5000 + (20x + 100)\big)$

$L(x) = -0{,}5x^2 + 280x - 5100$

Interval Kemonotonan (Naik dan Turun): Untuk menentukan interval kemonotonan, kita hitung turunan pertama dari $L(x)$.

$$L'(x) = \frac{d}{dx}(-0{,}5x^2 + 280x - 5100)$$

$L'(x) = -x + 280$

Laba maksimum terjadi saat $L'(x) = 0$, yaitu :

$-x + 280 = 0 \ \rightarrow x = 280.$

Fungsi laba $L(x)$ naik pada interval $(0{,}280)$ dan turun pada interval $(280, \infty)$

Interval Kecekungan: Untuk menentukan kecekungan, kita hitung turunan kedua dari $L(x)$.

$$L''(x) = \frac{d}{dx}(-x + 280)$$

$L''(x) = -1$

Karena

$L''(x) = -1$untuk semua x, grafik fungsi laba $L(x)$selalu cekung kebawah (cembung) diseluruh domainnya. Ini berarti $L(x)$memiliki maksimum global di $x = 280$.

Jumlah Unit untuk Memaksimalkan Laba: Dari hasil di atas, perusahaan harus memproduksi dan menjual 280 unit produk untuk memaksimalkan laba.

5.5 Kesimpulan

Kemonotonan dan kecekungan adalah konsep penting dalam kalkulus yang memberikan wawasan mendalam tentang sifat suatu fungsi. Kemonotonan membantu kita memahami interval di mana fungsi meningkat atau menurun, sementara kecekungan membantu kita menganalisis bentuk kurva dan menentukan titik-titik penting seperti maksimum, minimum, dan titik belok. Penerapan konsep-konsep ini sangat luas, mencakup berbagai bidang ilmu pengetahuan dan praktis, termasuk optimisasi, analisis tren, dan pemodelan matematis.

DAFTAR PUSTAKA

Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals. Cengage Learning.

Larson, R., & Edwards, B. (2013). Calculus. Cengage Learning.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus: Early Transcendentals. John Wiley & Sons.

Adams, R. A. (2003). Calculus: A Complete Course. Pearson Education.

Spivak, M. (2008). Calculus. Publish or Perish.

https://jagostat.com/kalkulus1/kemonotonan-dan-kecekungan#google_vignette

BAB 6
APLIKASI INTEGRAL TENTU

Oleh Widiya Astuti Alam Sur

6.1 Pendahuluan

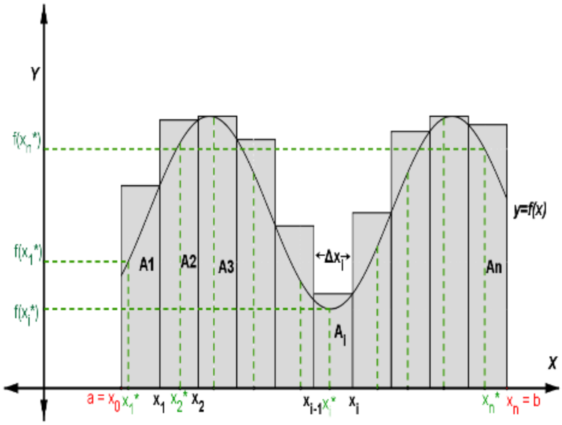
Aplikasi integral tentu dapat ditemukan dalam berbagai bidang ilmu, baik di bidang ilmu sains maupun sosial. Integral tentu dapat digunakan di bidang ilmu fisika, teknik, ekonomi, kimia, biologi, dan bidang ilmu lainnya. Integral tentu dapat digunakan untuk mengetahui luas suatu daerah, volume suatu benda, percepatan suatu benda bergerak, pusat massa, momen inersia, surplus produsen dan konsumen, total biaya dan penerimaan, proses pertumbuhan dan peluruhan, dan masih banyak penggunaan integral tentu lainnya.

Kajian pada bab ini akan memberikan konsep dasar dan aplikasi integral tentu yang difokuskan pada perhitungan luas daerah, dan perhitungan jarak tempuh suatu objek yang bergerak.

6.2 Konsep Dasar Integral Tentu

Kasus geometri yang memotivasi konsep dan definisi integral tentu adalah perhitungan luas daerah pada sumbu cartesius. Penentuan hasil perhitungan intgeral tentu yang didasarkan pada limit dari jumlahan Riemann, menjadi konsep dasar terdefinisinya integral tentu.

Misalkan suatu partisi pada interval $[a, b]$ dengan n subinterval (tidak mesti memiliki panjang yang sama) dengan titik-titik partisi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, dan misalkan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, dapat dipilih sebarang x_i^* yang disebut sebagai titik sampel untuk subinterval ke-i. Interpretasi partisi interval pada suatu fungsi f dapat dilihat pada Gambar 1 berikut:



Gambar 6.9. Ilustrasi Jumlahan Riemann luas daerah di bawah kurva

Berdasarkan ilustrasi gambar tersebut, maka konsep luas daerah di bawah kurva dapat didekati dengan menggunakan jumlahan dari luas persegi panjang yang terbentuk pada setiap subinterval. Pada setiap subinterval ke-i yaitu $[x_{i-1}, x_i]$, dapat dibentuk persegi panjang A_i dengan tinggi $f(x_i^*)$ dimana $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, dan lebarnya adalah Δx_i. Luas persegi panjang A_i dapat diperoleh dengan $A_i = f(x_i^*)\Delta x_i$

Jumlah dari keseluruhan luas daerah A_i di bawah kurva dapat dinyatakan dengan

$$R_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

$$= f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots f(x_n^*)\Delta x_n$$

bentuk jumlahan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

yang disebut sebagai jumlahan Riemann untuk fungsi f pada interval $[a, b]$.

Luas dari bidang datar di bawah grafik fungsi $y = f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk limit dari jumlah Riemann tersebut:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Jika fungsi f kontinu, maka nilai limit tidak tergantung pada titik-titik sampel x_i^* yang digunakan. Proses perhitungan limit tersebut yang kemudian memberikan definisi integral tentu dari suatu fungsi f atas interval tertutup [a,b].

Definisi 6.1

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada interval tutup $[a,b]$. Jika $lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ ada, maka dapat dikatakan bahwa f terintegralkan pada $[a,b]$. Selanjutnya, $\int_a^b f(x)\,dx$, disebut sebagai integral tentu (atau Riemann integral) dari a ke b yaitu:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Berikut diberikan contoh menghitung integral tentu mengunakan Definisi integral tentu.

Contoh 6.1

Gunakan definisi integral tentu untuk menghitung integral berikut:

$$\int_1^2 x^2 dx.$$

Solusi:

Terlebih dahulu, interval$[1,2]$ dibagi menjadi n subinterval dengan lebar yang sama untuk memudahkan.

Diperoleh lebar subinterval $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$,

sehingga nilai $x_i = x_0 + i.\Delta x$

dengan $i = 1,2,\ldots,n$ dan $x_0 = a$ adalah batas bawah interval.

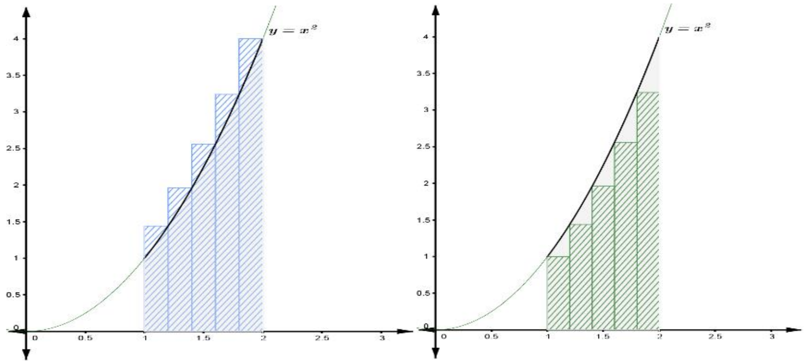
Diperoleh $x_i = 1 + i\frac{1}{n} = 1 + \frac{i}{n} = \frac{n+i}{n}$

Selanjutnya, dipilih suatu titik x_i^* dalam setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$. Untuk penentuan x_i^* dapat diambil sebarang titik secara random, dapat juga menggunakan titik ujung kanan, atau menggunakan titik ujung kiri pada setiap sub interval.

Penggunaan jumlahan Riemann dengan pengambilan x_i^* pada titik ujung kanan subinterval disebut sebagai Aturan Sisi Kanan, dan Aturan Sisi Kiri untuk pengambilan x_i^* pada titik ujung kiri subinterval.

Pada kasus ini, akan diselesaikan menggunakan Aturan Sisi Kanan. Untuk penyelesaian menggunakan aturan sisi kiri dan partisi subinterval secara random, dapat menyesuaikan nilai x_i^* yang dipilih.

Jumlahan Riemann yang berasosiasi dengan partisi menggunakan aturan sisi kanan dapat dituliskan sebagai berikut:



Gambar 6.10. Bentuk geometris jumlah Rieman aturan sisi kanan dan aturan sisi kiri

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n^3}\right) \sum_{i=1}^{n} (n+i)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{14n^3+9n^2+n}{6}\right)$$

$$= \frac{14n^3+9n^2+n}{6n^3}$$

Sehingga, diperoleh

$$\int_1^2 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} x_i^2 \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{14n^3+9n^2+n}{6n^3}$$

$$= \frac{14}{6}$$

$$= \frac{7}{3}$$

Jadi, nilai $\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$ ■

Selanjutnya, konsep jumlah Riemann sebagai konsep integral tentu ini menghubungkan konsep diferensiasi dan integrasi yang dikenal sebagai teorema Fundamental Kalkulus. Terdapat dua teorema fundamental kalkulus yaitu:

Teorema:
(Teorema Fundamental Kalkulus)
Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi kontinu dalam interval tertutup $[a,b]$.

I. *Jika* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, *maka* $F'(x) = f(x)$

II. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, *dimana* $F(x)$ *adalah suatu antiderivatif dari* $f(x)$ *dalam* $[a,b]$ *sehingga* $F' = F$

Teorema fundamental kalkulus bagian pertama menyatakan bahwa jika $f(x)$ adalah fungsi kontinu pada interval $[a,b]$, maka fungsi yang didefinisikan sebagai integral dari $f(x)$ dengan batas bawah tetap (a) dan batas atas variabel (x) terdiferensialkan dan turunannya adalah $f(x)$. Jika didefinisikan $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ maka turunannya adalah $F'(x) = f(x)$. Ini berarti jika kita menghitung intgeral fungsi $f(t)$ dari a hingga x, lalu menghitung turunan dari fungsi tersebut, maka kita akan mendapatka fungsi asli $f(x)$.

Teorema fundamental kalkulus bagian kedua menyatakan bahwa jika $f(x)$ adalah fungsi kontinu pada interval$[a,b]$ dan $F(x)$ adalah antiturunan dari $f(x)$ yaitu $F'(x) = f(x)$, maka integral tentu $f(x)$ dari a ke b dapat dihitung sebagai:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

yang berarti bahwa untuk menemukan luas di bawah kurva $f(x)$ dari a ke b cukup mencari antiturunan $F(x)$, kemudian menghitung selisih $F(b) - F(a)$.

6.3 Luas Daerah Bidang Datar

Perhitungan luas daerah bidang datar dapat diselesaikan berdasarkan konsep integral tentu berdasarkan jumlah Riemann tersebut :

1. Luas Daerah di atas sumbu X

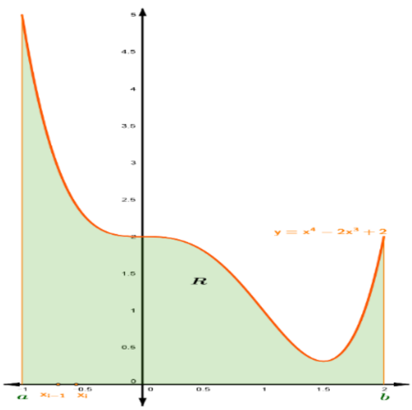
Misalkan $y = f(x)$ merupakan persamaan sebuah kurva pada bidang xy dan andaikan f adalah fungsi kontinu non negatif pada selang (interval) $a \leq x \leq b$. Daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik dari $y = f(x)$, $x = a$ dan $x = b$. Luasnya daerah $A(R)$ yang berada di atas sumbu X dapat ditentukan oleh:

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Contoh 6.2:

Tentukan luas daerah R dibawah $y = x^4 - 2x^3 + 2$ di antara $x = -1$ dan $x = 2$

Solusi:



Gambar 6.11. Luas Daerah di bawah fungsi $y = x^4 - 2x^3 + 2$

Bidang R pada grafik disajikan pada gambar berikut:

Estimasi luas daerah R paling mudah dapat diprediksi dengan hasil kali alas dan rata-rata tingginya yaitu $(3).(2) = 6$.

Akan tetapi, nilai sebenarnya dapat diperoleh menggunakan pendekatan konsep integral tentu yaitu :

$$A(R) = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)dx =$$

Berdasarkan teorema fundamental kalkulus bagian kedua, dapat ditentukan suatu fungsi yang merupakan fungsi anti diferensial dari $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ yang memenuhi $F'(x) = f(x)$.

Diperoleh fungsi $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 2x$ dimana

$$F'(x) = x^4 - 2x^3 + 2$$

Sehingga diperoleh:

$$A(R) = \int_{-1}^{2} f(x)\, dx$$

$$A(R) = F(2) - F(-1)$$

$$= \left(\tfrac{1}{5}(2^5) - \tfrac{1}{2}(2^4) + 2(2)\right) - \left(\tfrac{1}{5}(-1^5) - \tfrac{1}{2}(-1^4) + 2(-1)\right)$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right)$$

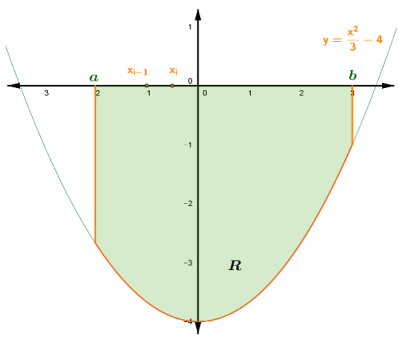
$$= \frac{51}{10} = 5{,}1$$

Hasil perhitungan 5,1 dekat dengan nilai estimasi yang diperoleh, yaitu 6.

2. Luas Daerah dibawah Sumbu X

Nilai dari luas suatu daerah sudah pasti adalah bilangan nonnegatif. Jika fungsi $y = f(x)$ berada di bawah sumbu X, maka $\int_a^b f(x)\ dx$ adalah bilangan negatif dan tentu saja tidak dapat dinyatakan sebagai luas suatu daerah. Pada dasarnya, nilai negatif tersebut adalah nilai dari luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $x = 0$. Dengan kata lain, luas daerah R yang berada di bawah sumbu x dapat ditulis sebagai

$$A(R) = -\int_a^b f(x)dx$$



Gambar 6.12. Ilustrasi luas daerah di bawah sumbu x

Contoh 6.3:

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh fungsi $y = \frac{x^2}{3} - 4$, sumbu x, $x = -2$ dan $x = 3$

Solusi:

Bidang R pada grafik disajikan pada gambar berikut

Seperti pada Contoh 9.1, Estimasi luas daerah R paling mudah dapat diprediksi dengan hasil kali alas dan rata-rata tingginya yatiu $(5).(3) = 15$. Nilai sebenarnya dapat diperoleh menggunakan pendekatan konsep integral tentu.

Diketahui bahwa fungsi $f(x) = \frac{x^2}{3} - 4$ terletak di bawah sumbu X. Oleh karenanya, berlaku

$$A(R) = -\int_a^b f(x)dx$$

$$A(R) = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3} + 4\right)dx$$

Berdasarkan teorema fundamental kalkulus bagian kedua, dapat ditentukan suatu fungsi yang merupakan fungsi anti diferensial dari $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 4$ yang memenuhi $F'(x) = f(x)$.

Diperoleh fungsi $F(x) = -\frac{x^3}{9} + 4x$ dimana

$$F'(x) = -\frac{x^2}{3} + 4$$

Sehingga diperoleh:

$$A(R) = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx$$

$$A(R) = F(3) - F(-2)$$

$$= \left[-\frac{(3)^3}{9} + 4(3)\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{9} + 4(-2)\right]$$

$$= \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right)$$

$$= \frac{145}{9} \approx 16{,}11$$

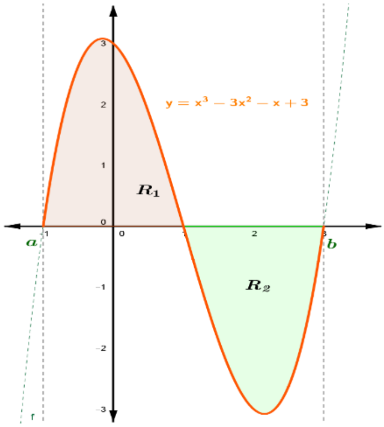
Hasil perhitungan 16,11 sangat dekat dengan nilai estimasi yang diperoleh, yaitu 15

■

Contoh selanjutnya, akan menggabungkan antara luas daerah yang berada di atas sumbu X dengan daerah yang berada di bawah sumbuY.

Contoh 6.4

Tentukanlah luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, segmen garis pada sumbu X antara $x = -1$ dan $x = 3$, dan garis $x = 3$.



Gambar 6.13. Luas daerah kurva di atas dan di bawah sumbu x

Luas daerah R digambarkan pada daerah yang diarsir. Dapat dilihat bahwa daerah tersebut terdiri atas dua bagian yaitu daerah yang berada diatas sumbu-x R_1 dan di bawah sumbu-x R_2. Luas daerah dua bagian tersebut dapat dihitung secara terpisah. Dari gambar dapat diketahui bahwa kurva memotong sumbu-x pada -1, 1, dan 3. Perlu diperhatikan bahwa luas daerah R_2 berada di bawah sumbu-x sehingga:

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx + \left[-\int_{1}^{3} (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx - \int_{1}^{3} (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx$$

Berdasarkan teorema fundamental kalkulus bagian kedua, dapat ditentukan suatu fungsi yang merupakan fungsi anti diferensial dari $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ yang memenuhi $F'(x) = f(x)$.

Diperoleh fungsi $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$ dimana

$$F'(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

Selanjutnya, diperoleh:

$$A(R_1) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

$$A(R_1) = F(1) - F(-1)$$

$$= \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 - \frac{1^2}{2} + 3(1) \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) \right]$$

$$= \frac{7}{4} - \left[-\frac{9}{4} \right]$$

$$= \frac{16}{4} = 4$$

$A(R_2) \quad = \int_1^3 f(x)\, dx$

$A(R_2) \quad = F(3) - F(1)$

$= \left[\frac{3^4}{4} - 3^3 - \frac{3^2}{2} + 3(9)\right] - \left[\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 - \frac{(1)^2}{2} + 3(1)\right]$

$= \frac{-9}{4} - \left[\frac{7}{4}\right]$

$= -\frac{16}{4} = -4$

Sehingga diperoleh:

$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$

$= \int_{-1}^{1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx - \int_1^3(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$

$= 4 - (-4)$

$= 8$ ∎

3. Luas Daerah di antara Dua Kurva

Selain dapat digunakan untuk menghitung luas daerah antara kurva dan sumbu x, integral tentu juga dapat digunakan untuk mengetahui luas daerah di antara beberapa kurva.

Misalkan daerah S berada di antara dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$, dan antara garis vertikal $x = a$ dan $x = b$, dimana f dan g adalah fungsi kontinu dengan $f(x) \geq g(x)$ untuk setiap x pada $[a, b]$.

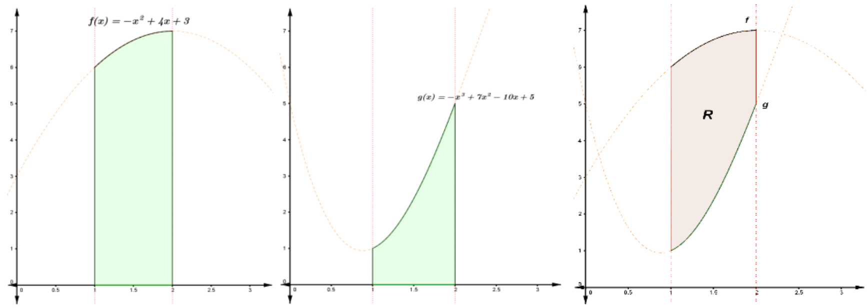
Kita dapat membagi area S kedalam n bidang dengan lebar yang sama, kemudian bidang ke-i diaproksimasi berdasarkan luas persegi panjang yang terbentuk dengan lebar Δx dan panjang $f(x_i^*) - g(x_i^*)$.

Contoh 6.5

Tentukanlah luas daerah di bawah $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ dan di atas $g(x) = -x^3 + 7x^2 - 10x + 5$ di antara interval $1 \leq x \leq 2$.

Solusi:

Pada gambar berikut, Gambar (i) dan (ii) masing-masing menunjukkan luas daerah di bawah fungsi f dan luas daerah dibawah fungsi g.



(i) (ii) (iii)

Gambar 6.14. Ilustrasi luas daerah di antara 2 kurva

Sementara, gambar (iii) menunjukkan luas daerah yang dibatasi oleh fungsi f dan fungsi g. Dengan kata lain, luas daerah pada gambar (iii) merupakan daerah irisan pada gambar (i) dan gambar (ii).

Dapat dilihat dari gambar (iii) bahwa luas daerah yang diarsir adalah luas daerah di bawah f dikurangi luas daerah dibawah g, pada batas interval yang sama yaitu [1,2]. Ilustrasi luas daerah di anatara dua kurva $A(R)$ dapat dituliskan sebagai:

$$\int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 f(x) - g(x)dx$$

Hasil integral tersebut dapat diperoleh baik dengan menyelesaikan masing-masing nilai integral kemudian mengurangkan hasilnya, atau bisa dengan mengurangkan terlebih dahulu fungsinya kemudian menentukan nilai integralnya.

Untuk kasus pada contoh ini luas $A(R)$ dapat lebih mudah diselesaikan dengan mengurangkan fungsi terlebih dahulu, seiahingga diperoleh suatu fungsi $h(x) = f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_1^2 f(x) - g(x)dx \\ &= \int_1^2 -x^2 + 4x + 3 - (-x^3 + 7x^2 - 10x + 5)dx \\ &= \int_1^2 (x^3 - 8x^2 + 14x - 2)dx \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema fundamental kalkulus bagian kedua, dapat ditentukan suatu fungsi yang merupakan fungsi anti diferensial dari $h(x) = x^3 - 8x^2 + 14x - 2$ yang memenuhi $H'(x) = h(x)$.

Diperoleh fungsi $H(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 7x^2 - 2x$ dimana

$$H'(x) = x^3 - 8x^2 + 14x - 2$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int_1^2 h(x)\,dx \\
A(R) &= H(2) - H(1) \\
&= \left[\frac{(2)^4}{4} - \frac{8(2)^3}{3} + 7(2)^2 - 2(2)\right] - \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{8(1)^3}{3} + 7(1)^2 - 2(1)\right] \\
&= \left[\frac{16}{4} - \frac{64}{3} + 28 - 4\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{8}{3} + 7 - 2\right] \\
&= \frac{80}{12} - \frac{31}{12} \\
&= \frac{49}{12}
\end{aligned}$$

■

6.4 Jarak dan Perpindahan

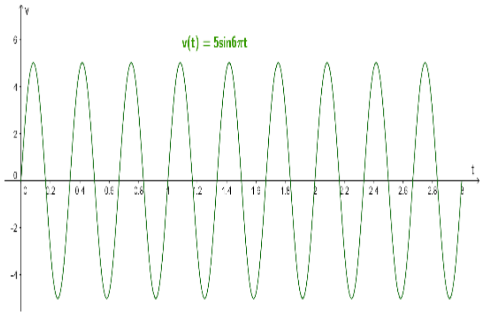
Misalkan sebuah benda bergerak di sepanjang garis lurus dengan kecepatan $v(t)$ pada saat t. Jika $v(t) \geq 0$, maka $\int_a^b v(t)\,dt$ merupakan jarak tempuh yang dilalui benda tersebut pada selang waktu $a \leq t \leq b$. Akan tetapi, jika $v(t)$ memiliki nilai negative (perpindahan objek yang bergerak mundur), maka:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

merupakan nilai perpindahan objek, yaitu jarak dari titik awal $s(a)$ ke titik akhir $s(b)$. Untuk mengetahui jarak total yang ditempuh objek sepanjang $a \leq t \leq b$, kita dapat menghitung nilai dari $\int_a^b |v(t)|dt$, sebagai daerah antara kurva kecepatan dan sumbu t

Contoh 6.6:

Sebuah benda diketahui berada pada posisi $s = 4$ pada saat $t = 0$. Kecepatan benda tersebut pada waktu t digambarkan dalam bentuk fungdi $v(t) = 5\sin 6\pi t$. Dimanakah posisi benda dan seberapa jauhkan perpindahan benda tersebut pada saat $t = 2$.



Gambar 6.15. Ilustrasi perpindahan benda pada kurva fungsi $v(t)$

Solusi:

Perpindahan benda yaitu perubahan posisi benda dari $t = 0$ ke $t = 3$ dapat dituliskan sebagai:

$$s(3) - s(0) = \int_0^3 v(t)\, dt$$

$$= \int_0^3 5 \sin 6\pi t \;\, dt$$

Berdasarkan konsep integral tentu berdasarkan teorem Fundamental Kalkulus II, dapat ditentukan suatu fungsi antiturunan $V(t)$ sehingga $V'(t) = 5 \sin 6\pi t$. Diperoleh $V(t) = -\frac{5}{6\pi} \cos 6\pi t$

Selanjutnya, nilai integral sebagai nilai perubahan posisi benda dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\int_0^3 5 \sin 6\pi t \;\, dt = V(3) - V(0)$$

$$= \left[-\frac{5}{6\pi} \cos 6\pi(3)\right] - \left[-\frac{5}{6\pi} \cos \pi(0)\right]$$

$$= \left[-\frac{5}{6\pi}(1)\right] - \left[-\frac{5}{6\pi}(1)\right]$$

$$= 0$$

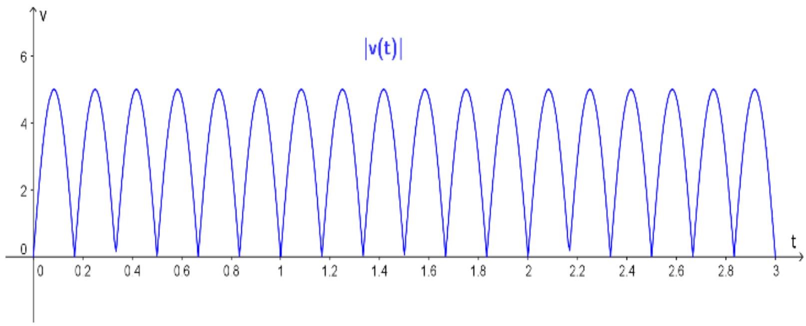
Diperoleh perubahan posisi benda adalah 0

Sehingga, posisi benda pada saat $t = 3$ dapat dituliskan sebagai posisi awal benda ditambahkan dengan perpindahan yang ditempuh benda. Oleh karena diketahui letak benda pada saat $t = 0$ adalah $s(0) = 4$, dan perubahan posisi benda adalah 0, maka posisi benda pada saat $t = 3$ dapat dituliskan sebagai:

$$s(3) = s(0) + 0$$

$$= 4 + 0 = 4$$

benda tersebut berada pada posisi $s = 4$ pada saat $t = 3$.



Gambar 6.16. Ilustrasi jarak tempuh benda dengan grafik fungsi $|v(t)|$

Selanjutnya, total jarak yang ditempuh dapat dihitung sebagai:

$$\int_0^3 |v(t)|dt = \int_0^3 |5 \sin 6\pi t|\, dt$$

bentuk integral tentu tersebut dapat diselesaikan berdasarkan sifat simetris. Dapat dilihat perubahan grafik fungsi $v(t)$ pada Gambar 7 menjadi grafik fungsi $|v(t)|$ pada Gambar 8 Kedua grafik memberikan gambaran jarak tempuh yang sama.

Sehingga diperoleh total jarak tempuh benda adalah:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 |5 \sin 6\pi t| dt &= 18 \int_0^{\frac{3}{18}} 5 \sin 6\pi t\ \ dt \\
&= 90 \int_0^{\frac{1}{6}} \sin 6\pi t\ \ dt \\
&= 90 \left[\left(-\frac{1}{6\pi} \cos 6\pi \left(\frac{1}{6}\right)\right) - \left(-\frac{1}{6\pi} \cos 6\pi(0)\right)\right] \\
&= 90 \left[\left(-\frac{1}{6\pi} \cos \pi\right) - \left(-\frac{1}{6\pi} \cos 0\right)\right] \\
&= -90.\frac{1}{6\pi} [(\cos \pi) - (\cos 0)] \\
&= -\frac{15}{\pi} [\cos \pi - \cos 0] = -\frac{15}{\pi} [-1 - 1] \\
&= -\frac{15}{\pi} [-2] \\
&= \frac{30}{\pi} \approx 9{,}55414 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

Adams, R.A. dan Essex, C., 2010, Calculus Single Variable 7th edition, Pearson, United States of America.

Arnold, T.B. dan Emerson, J.W., 2011, Nonparametric Goodness of Fit Tests for Discrete

Null Distributions. The R Journal, Vol.3/2,34-40

Bain, L.J.dan Engelhdart, 1992, Introduction to Probability and Mathematical Statistics,

Duxbury Press.

Bartle, R.G.dan Sherbert, D.R., 2000, Introduction to Real Analysis, John Wiley &

Sons, Inc. USA

Caligaris, M.G., Schivo, M.E., Romiti, M.R., 2014, Calculus and Geogebra, an Interesting

Partnership.Procedia-Social and Behavioral Science, 174, 1183-1188.

Salas,S., Hille,E., Etgen,G., 2007, Calculus One and Several Variables,10th edition, John Wiley & Sons, Inc., United States of America.

Serhan, D., 2015, Student's Understanding of Definite Integral Concept, International

White, A.L., 2016, Geogebra A Freeware Program (Geogebra Handout 2016), University of Western, Sidney.

Nugroho, D.B. 2011. Kalkulus Integral dan Aplikasinya. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Baisuni, Hasyim H.M. 2005. Kalkulus. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.

BAB 7
TEKNIK INTEGRASI

Oleh Mardiati

7.1 Pendahuluan

Dalam mempelajari integral, terkadang tidak semua bentuk integral bisa diselesaikan dengan teknik rumus dasar integral.
Perhatikan soal integrasi berikut ini:

1. $\int \frac{x^4-8}{x^2}\ dx$
2. $\int \frac{1-2x}{x-x^2}\ dx$
3. $\int x^2 \cos x\ \ dx$

Untuk soal no (1) dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus dasar integrasi, menjadi,

$$\int \frac{x^4-8}{x^2}\ dx = \int (x^2 - \frac{8}{x^2})\ dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x} + c$$

Sementara untuk soal no (2) dan (3) tidak bisa diselesaikan dengan teknik dasar tersebut.

Beberapa bentuk fungsi tersebut memerlukan metode atau teknik tertentu untuk dapat diintegrasikan dengan tepat. Teknik integrasi adalah metode khusus yang digunakan untuk menyederhanakan bentuk sehingga dapat menangani berbagai jenis integral yang tidak dapat diselesaikan dengan cara-cara dasar.

Terdapat tiga teknik integrasi yaitu teknik substitusi, integrasi parsial, dan integrasi menggunakan pecahan parsial. Setiap teknik dijelaskan secara rinci dengan contoh-contoh yang relevan dan aplikatif, sehingga pembaca dapat memahami dan menguasai konsep-konsep penting dalam teknik integrasi.

Pemahaman dan penguasaan teknik-teknik ini sangat penting untuk dapat menyelesaikan integral yang lebih kompleks, membuka peluang untuk memecahkan masalah yang lebih beragam dalam matematika dan aplikasinya.

7.2 Teknik Substitusi

Teknik substitusi digunakan untuk menyederhanakan integral dengan mengganti variabel integrasi dengan suatu fungsi baru yang lebih mudah diintegrasikan. Teknik ini didasarkan pada gagasan bahwa jika kita dapat menemukan bagian dari integral yang jika turunannya dapat disederhanakan dengan bagian integral yang lain dari suatu fungsi, maka kita dapat mengganti variabel tersebut untuk menyederhanakan proses integrasi.

Perhatikan kembali soal no (2) bahwa $(1-x)$ adalah turunan dari $(2x-x^2)$ sehingga dapat ditulis:

$$\int \frac{1-x}{2x-x^2}\,dx = \int \frac{d(2x-x^2)}{2x-x^2} = \ln|2x-x^2| + c$$

Bentuk integral ini $\int \frac{d(2x-x^2)}{2x-x^2}$ sesuai dengan bentuk rumus dasar integral $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

Misalkan kita memiliki integral bentuk umum berikut,

$$\int f\big(g(x).g'(x)\big)dx$$

Dalam kasus ini, kita dapat melakukan substitusi dengan memilih:

$$m = g(x)$$

Sehingga, turunan dari u terhadap x adalah:

$$\frac{dm}{dx} = g'(x) \quad \text{atau} \quad dm = g'(x)\,dx$$

Dengan substitusi ini, integral asli dapat ditulis ulang dalam bentuk:

$$\int f\big(g(x)\big).\,g'(x))\,dx = \int f(m)dm$$

Integral yang baru ini seringkali lebih sederhana dan lebih mudah untuk diintegrasikan. Setelah menyelesaikan integral dalam variabel $\boldsymbol{m}$, langkah terakhir adalah mengganti kembali $\boldsymbol{m}$ dengan $\boldsymbol{g(x)}$ untuk mendapatkan hasil integral dalam variabel asli $\boldsymbol{x}$.

Contoh 1:
Selesaikan integral $\int \frac{x\ dx}{(x^2+4)^3}$

Penyelesaian:
Andaikan $m = x^2 + 4$ maka $\frac{dm}{dx} = 2x$ dan $\frac{1}{2}dm = x\ dx$
Sehingga
$\int \frac{x\ dx}{(x^2+4)^3} = \int \frac{dm}{2(m)^3} = \frac{1}{2}\frac{1}{(-2)}m^{-2} + c = -\frac{1}{4m^2} + c$
jadi penyelesaian integralnya adalah:

$$\int \frac{x\ dx}{(x^2+4)^3} = -\frac{1}{4(x^2+4)^2} + c$$

Contoh 2:
Carilah integral $\int \frac{3x^2}{\sqrt{(6-4x^3)}}\ dx$

Penyelesaian:
Misalkan $m = 6 - 4x^3$, maka $dm = -12x^2 dx$,
dan $3x^2\ dx = -\frac{1}{4}dm$
sehingga

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{(6-4x^3)}}\ dx = \int -\frac{1}{4}\frac{dm}{\sqrt{(m)}} = \int -\frac{1}{4}m^{-\frac{1}{2}}\ dm$$

$$= -\frac{1}{4}.2m^{\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{4}\ m^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{m} + c$$

Selanjutnya mengganti $m = 6 - 4x^3$, diperoleh hasil integralnya adalah:

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{(6-4x^3)}}\ dx = -\frac{1}{2}\sqrt{(6-4x^3)} + c$$

Contoh 3:
Carilah integral $\int \frac{\theta}{cos^2(t^2)}\ d\theta$

Penyelesaian:
Andaikan $u = \theta^2$ maka $du = 2\theta d\theta$
Sehingga

$$\int \frac{\theta}{cos^2(\theta^2)}\ d\theta = \int \frac{1}{2cos^2(\theta^2)} 2\theta\ .d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{cos^2(u)} du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{cos^2(u)} du$$
$$= \frac{1}{2}\int sec^u\ du = \frac{1}{2}\tan u + c$$

Dengan mengubah $u = \theta^2$, penyelesaian integral menjadi:

$$\int \frac{\theta}{cos^2(t^2)}\ d\theta = \frac{1}{2}\tan\theta^2 + c$$

Contoh 4:

Carilah integral $\int \theta\sqrt{\theta - 2}\ d\theta$

Penyelesaian:

Andaikan $u = \sqrt{\theta - 2}$ maka $u^2 = \theta - 2$

Diperoleh diferensialnya: $2udu = d\theta$

Sehingga

$$\int \theta\sqrt{\theta - 2}\ d\theta = \int (u^2 + 2)u.2u\ \ du$$
$$= \int (2u^4 + 4u^2)\ \ du$$
$$= \frac{2}{5}u^5 + \frac{4}{3}u^3 + c$$

selanjutnya kita ubah kembali $u = \sqrt{\theta - 2}$, menjadi

$$\int \theta\sqrt{\theta - 2}\ d\theta = \frac{2}{5}(\sqrt{\theta - 2})^5 + \frac{4}{3}(\sqrt{\theta - 2})^3 + c$$

SOAL LATIHAN 1:
Dengan menggunakan teknik substitusi, carilah integral berikut ini:

1. $\int \frac{\sqrt{16-5p^2}}{p} dp$
2. $\int \sin(3\theta - 4)\, d\theta$
3. $\int \frac{\tan z}{\cos z} dz$
4. $\int \frac{e^x}{1+2e^x} dx$
5. $\int x^2\sqrt{9-2x^2}$

7.3 Teknik Integrasi Parsial

Terkadang kita mendapatkan bentuk integral yang tidak bisa kita selesaikan dengan menggunakan teknik substitusi seperti yang telah dibahas sebelumnya. Sebagai contoh perhatikan bentuk integrasi berikut ini:

1. $\int x^2 \ln x \, dx$,
2. $\int x^2 \cos x \, dx$.

Untuk menghitung integral dari hasil kali dua fungsi yang tidak mudah diintegrasikan secara langsung, teknik integrasi parsial dapat membantu penyelesaian integrasi dengan menggu-nakan aturan diferensiasi produk. Untuk memahami aturan diferensiasi produk, misalkan jika diberikan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$ adalah dua fungsi dari $\boldsymbol{x}$, maka turunan dari hasil kali dua fungsi $u(x).v(x)$ ini adalah:

$$\frac{d}{dx}(u.v)\,\frac{d}{dx}[u(x).v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Integrasi persamaan tersebut menjadi,

$$\int d\,[u(x).v(x)] = \int u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,dx$$

$$u(x).v(x) = \int u'(x).v(x)dx + \int u(x).v'(x)dx$$

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x).v(x)\,dx$$

Ini adalah rumus integrasi parsial, yang sering ditulis dalam bentuk umum sebagai:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Contoh 5:
Hitung $\int xe^x\,dx$
Penyelesaian:
Gunakan aturan integrasi parsial $\int udv = uv - \int vdu$.
Dengan

$$u = x \text{ maka } du = dx$$

dan

$$dv = e^x dx$$

$$\int dv = \int e^x dx$$

$$v = e^x$$

sehingga

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

Contoh 6:
Hitung $\int x\;cosx\;dx$

Penyelesaian:
Misalkan u = x dan dv = cos x dx
Maka du = dx dan v = sin x
Pengintegralan parsial menjadi:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x - (-\cos x) + C$$

$$= x\sin x + \cos x + c$$

Contoh 7:
Tentukan $\int x^2 \sin x\;\;dx$

Penyelesaian:
Misalkan $= x^2$, dan $dv = \sin x\,dx$
Maka $du = 2x\,dx$ dan $v = -\cos x$
Pengintegralan parsial menjadi:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\ dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\ dx$$

$$= -x^2 \cos x + \cos x + c$$

Pada bentuk terakhir terdapat $\int x$ cos $x\ dx$, sehingga harus dilakukan pengintegralan parsial yang kedua.

Misalkan $u = x$ maka $du = dx$

dan $dv = \cos x\ dx$ maka $v = \sin x$

Sehingga diperoleh

$$\int x^2 \sin x\ dx = -x^2 \cos x + 2[(x \sin x) - \int \sin x\ dx]$$

$$= -x^2 \cos x + 2[(x \sin x) - (-\cos x)] + c$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

Contoh 8:

Tentukan $\int x^5 \ln x\ dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \ln x$; maka $du = \frac{1}{x}dx$

dan $dv = x^5\ dx$; maka

$$\int dv = \int x^5\,dx$$

$$v = \frac{1}{6}x^6 + c$$

Sehingga Pengintegralan parsial menjadi:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^5 \ln x\ dx = (\ln x)(\frac{1}{6}x^6) - \int \frac{1}{6}x^6(\frac{1}{x}dx)$$

$$= \frac{1}{6}x^6.\ln x - \frac{1}{6}\int x^5\,dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6.\ln x - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)\ x^6 + c$$

$$\int x^6 \ln x \; dx = \frac{1}{6} x^6 . \ln x - \frac{1}{36} x^6 + c$$

SOAL LATIHAN 2:

Dengan menggunakan teknik substitusi, carilah integral berikut ini:

1. $\int e^t \cos t \, dt$
2. $\int x \ln(x+1) \, dx$
3. $\int x \, e^{2x} \, dp$
4. $\int x \sqrt{x+1} dx$
5. $\int w \ln w \, dw$

7.4 Teknik Pecahan Parsial

Fungsi rasional yaitu fungsi yang berbentuk pecahan di mana pembilang dan penyebutnya adalah polynomial. Salah satu teknik dalam kalkulus yang digunakan untuk menyelesaikan integral dari fungsi rasional adalah teknik integral pecahan parsial. Tujuan teknik ini adalah untuk memecah fungsi rasional tersebut menjadi jumlah pecahan sederhana yang lebih mudah untuk diintegrasikan.

Contoh 9:

Tentukan $\int \frac{5x+4}{x^2+x-2} dx$

Penyelesaian:

Tuliskan integran menjadi

$$\frac{5x+4}{x^2+x-2} = \frac{5x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)}$$

dengan A dan B adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan,

$\frac{5x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)}$

$$\frac{5x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$5x+4 = A(x-1) + B(x+2)$$
$$5x+4 = Ax - A + Bx + 2B$$

$5x + 4 = Ax + Bx - A + 2B$
Diperoleh dua persamaan,
$A + B = 5$
$-A + 2B = 4$

Selanjutnya tentukan nilai A dan B dengan menggunakan metode eliminasi, diperoleh: A=2 dan B=3.

$$\frac{5x + 4}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{2}{(x + 2)} + \frac{3}{(x - 1)}$$

$$\int \frac{5x + 4}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{2}{(x + 2)} dx + \int \frac{3}{(x - 1)} dx$$

$$= 2 \ln(x + 2) + 3 \ln(x - 1) + c$$

$$\int \frac{5x + 4}{x^2 + x - 2} dx = ln\,(x + 2)^2 + \ln(x - 1)^3 + c$$

Contoh 10:
Carilah $\int \frac{4x+7}{(x^2+1)(x-2)} dx$

Penyelesaian:
tulislah integran menjadi

$$\frac{4x + 7}{(x^2 + 1)(x - 2)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} + \frac{C}{(x - 2)}$$

$$\frac{4x + 7}{(x^2 + 1)(x - 2)} = \frac{(Ax + B)(x - 2)}{(x^2 + 1)(x - 2)} + \frac{C(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 2)}$$

$5x + 4 = (Ax + B)(x - 2) + C(x^2 + 1)$
$5x + 4 = Ax^2 + Bx - 2Ax - 2B + Cx^2 + C$
$Ax^2 + Cx^2 - 2Ax + Bx - 2B + C = 5x + 7$

Diperoleh 3(tiga) persamaan dengan 3(tiga) variabel
$A + C = 0$
$-2A + B = 4$
$-2B + C = 7$

Selanjutnya tentukan nilai A, B dan C dengan menggunakan metode eliminasi, diperoleh: A=3; B=-2 dan C=3.

$$\int \frac{4x+7}{(x^2+1)(x-2)} dx = \int \frac{3x+2}{(x^2+1)} dx + \int \frac{3}{(x-2)} dx$$

$$= \int \frac{3x}{(x^2+1)} dx + \int \frac{2}{(x^2+1)} dx + \int \frac{3}{(x-2)} dx$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + 2\arctan(x) + 3\ln(x-2) + c$$

Jadi

$$\int \frac{4x+7}{(x^2+1)(x-2)} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + 2\arctan(x) + 3\ln(x-2) + c$$

SOAL LATIHAN 3:

Dengan menggunakan teknik substitusi, carilah integral berikut ini:

1. $\int \frac{x-6}{x^2-2x} dx$
2. $\int \frac{x^2+3x-10}{x^2-2x-3} dx$
3. $\int \frac{x+1}{(x-3)^2} dx$
4. $\int \frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)} dx$
5. $\int \frac{3x-2}{x^2-x-6} dx$

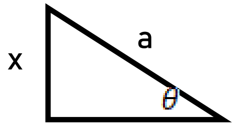
7.5 Teknik Integrasi Dengan Substitusi Trigonometri

Untuk menyelesaikan integral yang mengandung bentuk aljabar tertentu—terutama yang melibatkan akar kuadrat atau kuadrat dari ekspresi—teknik integrasi substitusi trigonometri menggunakan fungsi trigonometri untuk menggantikan variabel.

Teknik integrasi dengan substitusi trigonometri ini digunakan Jika terdapat integran yang memuat bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$, atau $\sqrt{x^2 - a^2}$, dengan $a > 0$. Teknik integrasi dengan substitusi trigonometri ini dilakukan untuk merasionalkan bentuk akar tersebut.

7.5.1 Bentuk pertama $\sqrt{a^2 - x^2}$

Perhatikan gambar berikut ini:



Menghasilkan nilai:

$$sin\ \theta = \frac{x}{a} \quad \rightarrow \; x = a \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\ sin^2\ \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1\ -\ sin^2\ \theta)} \\ &= \sqrt{a^2\ cos^2\ \theta} = a\cos\theta\end{aligned}$$

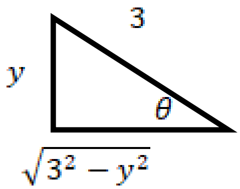
sehingga bentuk $\boldsymbol{\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t}$.

Contoh 11:

Carilah

$$\int \frac{\sqrt{9 - y^2}}{y^2} dy$$

Penyelesaian:



Sesuai dengan bentuk bentuk: $\sqrt{a^2 - y^2}$, dapat menggunakan substitusi: $\frac{y}{3} = \sin\theta$ sehingga $y = 3\sin\theta$ dan $dy = 3\cos\theta\ dt$

Dengan substitusi ini, kita juga memiliki:

$$\sqrt{9 - y^2} = \sqrt{9 - (3\sin\theta)^2} = 3\cos\theta$$

Sehingga menjadi,

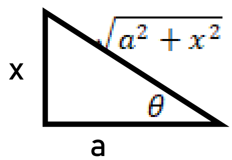
$$\int \frac{\sqrt{9-y^2}}{y^2}dy = \int \frac{3\cos\theta}{(3\sin\theta)^2} 3\cos\theta\, d\theta$$
$$= \int \frac{9\cos^2\theta}{9\ sin^2\theta}d\theta = \int \frac{\cos^2\theta}{sin^2\theta}d\theta$$
$$= \int cot^2\theta\ d\theta = \int (cosec^2\theta - 1)d\theta$$
$$= -\cot\theta - \theta + c$$
Selanjutnya substitusi kembali $\sin\theta = \frac{y}{3}$ dan $\cos\theta = \frac{\sqrt{9-y^2}}{3}$ dengan $\theta = arc\ sin\frac{y}{3}$ kembali ke semula:

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{9-y^2}}{y}$$
Maka, hasil akhir integralnya adalah:

$$\int \frac{\sqrt{9-y^2}}{y^2}dy = -\frac{\sqrt{9-y^2}}{y} - arc\sin\frac{y}{3} + c$$

7.5.2 Bentuk kedua $\sqrt{x^2+a^2}$

Perhatikan gambar berikut ini:



Maka, $tan\ \theta = \frac{x}{a}$ $\rightarrow x = a\tan\theta$

$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2 - a^2\ tan^2\ \theta}$

$= \sqrt{a^2(1\ -\ tan^2\theta)}$

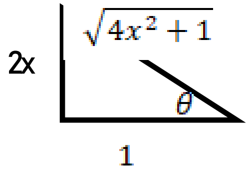
$= \sqrt{a^2\ sec^2\ \theta} = a\sec\theta$

sehingga bentuk $\boldsymbol{\sqrt{x^2+a^2} = a\sec\theta}$

Contoh 12:

Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$

Penyelesaian:



Sesuai dengan bentuk bentuk: $\sqrt{x^2+a^2}$, dapat menggunakan substitusi:

$\tan\theta = 2x$ sehingga $x = \frac{1}{2}\tan\theta$ dan $dx = \frac{1}{2}sec^2\,\theta\; d\theta$

Dan $\sqrt{4x^2+1} = \sec\theta$

Dengan menggunakan metode substitusi diperoleh hasil sebagai berikut,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \int \frac{\frac{1}{2}sec^2\,\theta\; d\theta}{\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{sec^2\,\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

Selanjutnya substitusi kembali

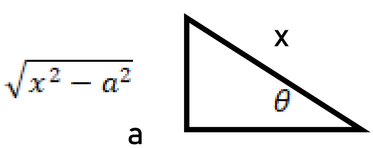
$\tan\theta = 2x$ dan $\sqrt{4x^2+1} = \sec\theta$

Sehingga hasil akhir integralnya adalah:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\ln|\sqrt{4x^2+1} + 2x| + c$$

7.5.3 Bentuk ketiga $\sqrt{x^2-a^2}$,

Perhatikan gambar dibawah ini:



maka $ec\ \theta = \frac{x}{a}$, dan $x = a\sec t$

dan $dx = a\sec t\tan t\, dt$, sehingga,

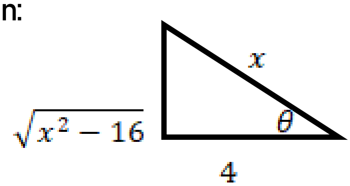
$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(a \sec\theta)^2 - a^2}$$
$$= \sqrt{a^2 sec^2\,\theta - a^2} = \sqrt{a^2 (sec^2\,\theta - 1)}$$
$$= \sqrt{a^2\ tan^2\,\theta} = a \tan\theta$$

sehingga $\quad \boldsymbol{\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan\theta}$

Contoh 13:

Carilah $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-16}}\, dx$

Penyelesaian:



Sesuai dengan bentuk bentuk: $\sqrt{x^2 - a^2}$, dapat menggunakan substitusi:

$\sec\,\theta = \frac{x}{4}$ sehingga $x = 4\sec\theta$ dan $dx = 4\sec\theta\tan\theta\ d\theta$.

Dan ekspresi $\sqrt{x^2 - 16}$ dapat disederhanakan sebagai:

$\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{16 sec^2\theta - 16} = \sqrt{16(sec^2\theta - 1)} = 4\tan\theta$

Substitusi $x = 4\sec\theta$ ke dalam integral:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 16}} dx = \int \frac{4^3\, sec^3\,\theta}{4\tan\theta} 4\sec\theta\tan\theta\ d\theta$$

$$= 64 \int sec^4\theta\, d\theta$$

Gunakan identitas trigonometri,

$sec^4\theta = (sec^2\theta)^2$ dan $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$,

$$= 64 \int sec^4\theta\, d\theta$$

$$= 64 \int sec^2\theta(1 + tan^2\theta)\, d\theta$$

$$= 64 \int (sec^2\theta + sec^2\theta\, tan^2\theta)\, d\theta$$

Karena

$\int sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta + c$; dan

$$\int sec^2\theta\, tan^2\theta\; d\theta = \frac{1}{3} tan^3\theta + c$$

$$= 64 \int (sec^2\theta + sec^2\theta\, tan^2\theta)\; d\theta$$

$$= 64.\tan\theta + 64.\frac{1}{3}.\, tan^3\theta + c$$

Karena $x = 4\sec\theta$, $\sec\ \theta = \frac{x}{4}$ sehingga $\frac{\sqrt{x^2-16}}{4} = \tan\theta$, maka hasil akhir integralnya adalah:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-16}} dx = 64.\frac{\sqrt{x^2-16}}{4} + 64.\frac{1}{3}.\left(\frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right)^3 + c$$

SOAL LATIHAN 4:

Dengan menggunakan teknik substitusi, carilah integral berikut ini:

1. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3} dx$
2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
4. $\int \frac{dp}{\sqrt{9p^2+6p-8}}$
5. $\int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3} dt$
6. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+9}} dx$

DAFTAR PUSTAKA

Bien, Yusak I., Farida Daniel., dan Prida N.L. Tanco. 2018. Kalkulus Integral Berbasis Maple. Yogyakarta: Deepublish.

Frank Ayres,. J.C Ault. 1984. Kalkulus Diferensial dan Integral (Seri Buku Schaum). Alih Bahasa Lea Prasetyo. Jakarta: Erlangga.

Indriati, Kumala. 2019. Kalkulus Dasar untuk Perguruan Tinggi. Jakarta: Universitas Katolik Indonesia Atma Jaya.

Iswandi, Hazrul dkk. 2017. Kalkulus. Malang: Media Nusa Creative.

Leithold, Louis. 1986. Kalkulus dan Geometri Analitik. Alih Bahasa S. Nababan. Jakarta: Erlangga.

Martono, Koko. 1999. Kalkulus. Jakarta: Erlangga.

Meilasari, Venty dan Ratih Handayani. 2019. Kalkulus Integral. Lampung: Universitas Muhammadiyah Kotabumi.

Mursita, Danang. 2004. Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi. Jakarta: Rekayasa Sains.

Purcel, Edwin.J., dan Dale Varberg. 1996. Kalkulus dan Geometri Analitis. Alih Bahasa I Nyoman Susila dkk. Edisi Keenam. Jilid 1. Jakarta: Erlangga.

Subandi, Ayub. 2019. Aljabar dan Kalkulus. Bandung: Rekayasa Sains.

Zetriuslita dan Rezi Ariawan. 2022. Buku Ajar Kalkulus Integral: Berbasis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis. Riau: UIR PRESS.

.

BAB 8
PENERAPAN INTEGRAL

Oleh Didiek Hari Nugroho

8.1 Pendahuluan

Integral adalah salah satu konsep dasar dalam dunia kalkulus, yang memiliki peran penting dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan. Secara teoritis konsep integral dapat diaplikasikan untuk menghitung luas daerah di bawah kurva dan volume benda-putar dengan bentuk yang tidak beraturan (Purnomo, 2021), penerapan metode integral dalam sains dan teknik (Constanda, Riva, Lamberti, & Musolino, 2017), penerapan integral dalam kedokteran nuklir dan spektroskopi (Reza, Behbahani, & Saramad, 2018), aplikasi integral dalam menghitung perpindahan massa dalam kolom gelembung jet (Evans & Machniewski, 1999), aplikasi integral dalam bidang ekonomi dan finansial (Harini & Sari, Mei 2020), penerapan integral dalam bidang biologi dan kedokteran (Ryan & Wallace, 2017), dan juga memiliki peran yang luas dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan dan kehidupan sehari-hari.

8.2 Konsep Teoritis

Dalam konteks matematika, integral dapat dipahami sebagai proses penggabungan jumlah kecil yang tak terhingga menjadi kesatuan yang lebih besar. Integrasi adalah kebalikan dari diferensiasi, dimana kita dapat mulai dari turunannya dan harus bekerja ke arah sebaliknya untuk mencari yang sudah diturunkan tersebut (Stroud & Booth, 2003). Ada dua jenis integral yang sering digunakan yaitu; integral tak tentu dan integral tentu. Integral tak tentu digunakan untuk mencari fungsi primitif dari suatu fungsi, sedangkan integral tentu digunakan untuk menghitung luas daerah di bawah kurva pada interval tertentu.

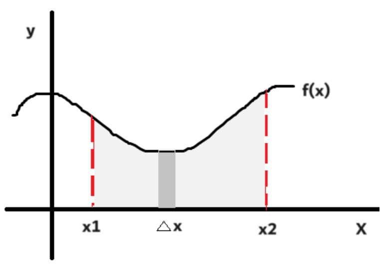
8.3 Penerapan Integral

Penerapan integral dapat menjangkau berbagai disiplin ilmu dengan cara yang sangat luas dan bervariasi. Namun, pada bab ini akan dibahas penerapan integral pada beberapa bidang ilmu sains dan teknik diantaranya: penerapan integral untuk menghitung luas di bawah kurva (geometri analitis), volume benda-putar, reaktor kimia batch (partaian), kolom gelembung pancaran, manometer-U, dan transfer panas konduksi.

8.3.1 Penerapan integral untuk menghitung luas

Soal menghitung luas di bawah kurva bidang (geometri analitis) sering kita jumpai, namun sering kali kita melakukan kesalahan dalam menghitung luas bidang tersebut. Untuk menghindari kesalahan tersebut, hal yang paling terpenting adalah memahami definisi dari luas. Luas merupakan hasil dari perkalian antara dua buah garis yang saling tegak lurus. Sekarang kita aplikasi definisi luas ini dalam memahami beberapa gambar beikut ini:

Menghitung luas kurva antara f(x) dengan sumbu-x



Dari gambar disamping terlihat bahwa garis Δx (garis pertama) dan garis yang dibentuk oleh kurva/persamaan f(x) (garis kedua) yang saling tegak lurus antara kedua garis tersebut, maka sesuai dengan definisi luas akan diperoleh rumus:

$Luas = f(x)\Delta x$ ...Pers(1)

Apabila persamaan (1) diatas diintegrasikan dengan batasan $x_1 \leq \Delta x \leq x_2$, maka akan diperoleh:

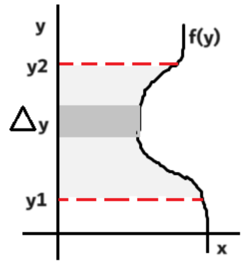
$Luas = f(x)\Delta x$ ...Pers(1)

Apabila persamaan (1) diatas diintegrasikan dengan batasan $x_1 \leq \Delta x \leq x_2$, maka akan diperoleh:

$Luas = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ ...Pers(2)

Luas antara kurva f(y) dengan sumbu-y

Hal yang sama juga apabila kita akan menghitung luas suatu kurva yang dibatasi oleh sumbu y dengan batasan $y_1 \leq \Delta y \leq y_2$ seperti pada gambar disamping;

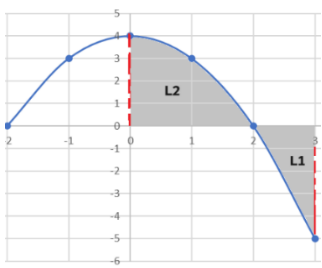


$$Luas = \int_{y_1}^{y_2} f(y)\,dy \quad \text{...Pers(3)}$$

Contoh soal:

Hitunglah luas daerah dari persamaan $f(x) = 4 - x^2$ terhadap sumbu x dengan batasan $0 \leq x \leq 4$

Solusi:



Dari gambar disamping terlihat bahwa luas ada dua daerah, maka untuk mencari luas daerah sebagai berikut:

$$Luas = L_1 + L_2$$

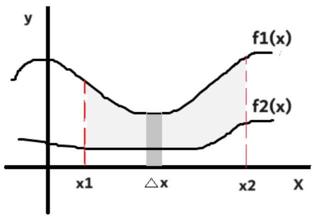
Karena L_1 merupakan luas di bawah kurva sumbu x yang bernilai negatif, maka dilakukan sebagai berikut:

$$L = \left|\int_2^3 4 - x^2 dx\right| + \int_0^2 4 - x^2 dx$$

$$= \left|4x - {}^1/_3\, x^3\Big]_2^3\right| + 4x - {}^1/_3\, x^3\Big]_0^2$$

$$= {}^7/_3 + {}^{16}/_3 = 7\,{}^2/_3$$

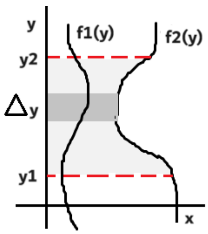
Luas antara dua kurva f(x) dengan sumbu- x



$f_1(\boldsymbol{x}) > f_1(\boldsymbol{x})$, $x_1 \leq \Delta x \leq x_2$

$$Luas = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) - f_2(x)\, dx$$

Luas antara dua kurva f(y) dengan sumbu-y



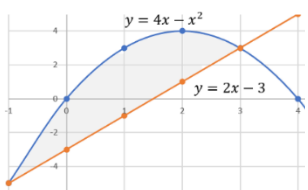
$f_2(\boldsymbol{y}) > f_1(\boldsymbol{y})$, $y_1 \leq \Delta y \leq y_2$

$$Luas = \int_{y_1}^{y_2} f_2(y) - f_1(y)\, dy$$

Contoh soal:

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh 2 buah kurva dari persamaan $y = 4x - x^2$ dan $y = 2x - 3$

Solusi:



Mencari titik potong antara dua kurva: $f_1(x) = f_2(x)$

$$4x - x^2 = 2x - 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$(x + 1)(x - 3) = 0$, diperoleh $X_1 = -1$ dan $x_2 = 3$

$$Luas = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) - f_2(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (4x - x^2) - (2x - 3)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{3} 3 + 2x - x^2\, dx$$

$$= 3x + x^2 - {}^1\!/_3\, x^3 \Big|_{-1}^{3} = 10\,{}^2\!/_3$$

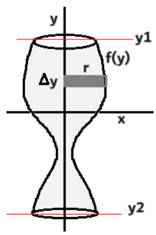
8.3.2 Penerapan integral untuk menghitung volume benda-putar

$$Volume = Luas\ alas\ \times tinggi$$

Karena alas benda berbentuk lingkaran dengan jari-jari (r) maka volume benda akan menjadi:

$$Volume = \pi r^2 t \qquad \text{...Pers(1)}$$

Volume kurva f(y) yang diputar pada sumbu-y



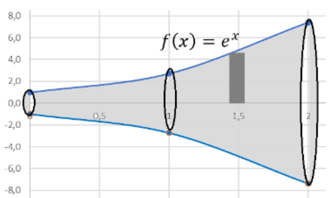
Gambar disamping diperoleh r = f(y) dan tinggi benda merupakan Δy dengan batasan ketinggian pada sumbu y adalah $y_2 \leq y \leq y_1$, maka persamaan (1), akan menjadi:

$$Volume = \pi \int_{y_2}^{y_1} \{f(y)\}^2 dy \quad \text{...Pers(3)}$$

Contoh soal

Hitunglah volume dari kurva $f(x) = e^x$ yang diputar terhadap sumbu-x dengan batasan $0 \leq x \leq 2$

Solusi:



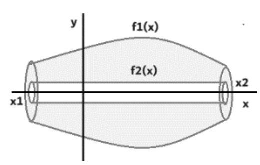
$$Volume = \pi \int_0^2 \{e^x\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi e^{2x}\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\pi(e^4 - e^0) = 26{,}8\pi$$

Volume 2 kurva f(x) yang diputar pada sumbu x

$f_1(x) > f_1(x)$, $x_1 \leq \Delta x \leq x_2$

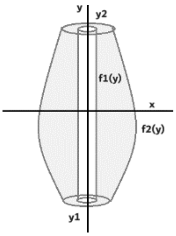


$$Volume = \pi \int_{x_1}^{x_2} \{f_1(x)\}^2 - \{f_2(x)\}^2 dx \text{...Pers(4)}$$

(Missen, Mims, & Saville, 1999)

Volume 2 kurva f(y) yang diputar pada sumbu y

$f_2(y) > f_1(y)$, $y_1 \leq \Delta y \leq y_2$

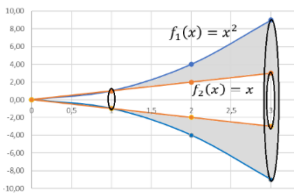


$$Volume = \pi \int_{y_1}^{y_2} \{f_2(y)\}^2 - \{f_1(y)\}^2 dy$$ ...Pers(5)

Contoh soal:

Hitunglah volume benda yang dibatas kurva $f_1(x) = x^2$ dan $f_2(x) = x$ diputar pada sumbu x dengan batasan $1 \leq x \leq 3$

Solusi:



$$Volume = \pi \int_{1}^{3} \{x^2\}^2 - \{x\}^2 dx$$

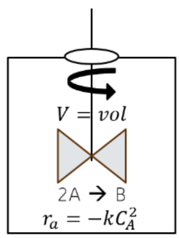
$$V = \pi \int_1^3 x^4 - x^2 dx$$

$$V = \pi \left\{ {}^1/_5 x^5 - {}^1/_3 x^3 \right\} \Big|_1^3$$

$$V = \pi \left\{ \left({}^1/_5 3^5 - {}^1/_3 3^3 \right) - \left({}^1/_5 1^5 - {}^1/_3 1^3 \right) \right\} = 39\,{}^{11}/_{15}\pi$$

8.3.3 Penerapan integral pada reaktor kimia batch

Reaksi orde dua dan elementer fasa cair dari 2A → B yang terjadi secara isotermal dan pengadukan sempurna pada reaktor batch. Pada kondisi awal, konsentrasi A adalah 4 mol/m^3. Jika laju reaksi destruksi A dinyatakan dalam $r_A = -kC_A^2$ dan nilai k = 0,05 menit^{-1}. Hitunglah konsentrasi A (dalam mol/m^3) setelah 10 menit.



$N_a = mol$

asumsi: Well mixed

Solusi:

Neraca massa reaktor batch: (Missen, Mims, & Saville, 1999)

$$\begin{bmatrix} neraca \\ massa \end{bmatrix}_{in} - \begin{bmatrix} neraca \\ massa \end{bmatrix}_{out} + \begin{bmatrix} pembentukan \\ karena\ reaksi \end{bmatrix} = [akumulasi]$$

Dalam reaktor batch tidak ada aliran masuk dan keluar dan A adalah reaktan, maka:

$$[0] - [0] + \left[\int r_A\, dV\right] = \left[\frac{dN_A}{dt}\right]$$ ...Pers(1)

Karena diketahui adalah nilai konsentrasi A, dimana $N_A = C_A V$ dan $\int r_A dV = r_A V$, maka persamaan diatas akan menjadi:

$r_A \mathrm{V} = \left[\frac{dC_A V}{dt}\right]$ ...Pers(2)

Karena nilai V merupakan konstan, maka persamaan (2) akan berubah menjadi:

$r_A \mathrm{V} = V\left[\frac{dC_A}{dt}\right]$ ...Pers(3)

diketahui bahwa $r_A = -kC_A^2$, maka persamaan (3) akan berubah menjadi:

$-kC_A^2 = \left[\frac{dC_A}{dt}\right]$ ...Pers(4)

Untuk menyelesaikan persamaan (4) dapat kita integrasi dengan batasan integrasi: pada saat t = 0 maka konsentrasi $C_A = C_{A0}$ dan pada saat t = t maka nilai $C_A = C_{At}$

$-k\int_0^t dt = \int_{C_{Ao}}^{C_{At}} \frac{dC_A}{C_A^2}$ ...Pers(5)

$kt = \frac{1}{C_{At}} - \frac{1}{C_{Ao}}$ ...Pers(6)

$C_{At} = \frac{C_{Ao}}{1+C_{Ao}kt}$ ...Pers(7)

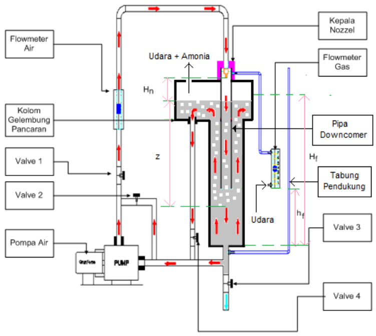
Karena yang ditanyakan adalah konsentrasi C_{At} pada saat t = 10 menit dengan nilai $C_{A0} = 4\, mol/m^3$ dan k = 0,05 menit^{-1}, maka kita dapat memasukkan nilai yang diketahui tersebut ke persamaan (7), sehingga akan diperoleh nilai C_{At} :

$$C_{At} = \frac{4\, mol/m^3}{1 + 5\, mol/m^3 \times 0{,}05 menit^{-1} \times 10 menit}$$

$$= 1{,}33\, {}^{mol}/_{m^3}$$

8.3.4 Penerapan integral pada kolom gelembung pancaran

Kolom gelembung pancaran merupakan salah satu alat yang dapat diaplikasikan untuk menyisihkan kadar amonia yang terkandung didalam limbah cair indutri pupuk. Permodelan matematika khusunya integrasi digunakan untuk mencari nilai koefisien transfer massa dan menghitung konsentrasi amonia yang keluar pada waktu tertentu (Nugroho, Adisalamun, & Machdar, 2014)



$$-Q_g C_{g_{out}} = V_l \frac{dC_t}{dt}$$ ...Pers(1)

$$C_{g_{out}} = C_t He\left\{1 - e^{-\left(\frac{K_L a V_l}{HeQ_g}\right)}\right\}$$ ..Pers(2)

Apabila persamaan (2) disubtitusikan ke persamaan (1) dan diintegrasikan, akan diperoleh:

$$-Q_g C_t He\left\{1 - e^{-\left(\frac{K_L a V_l}{HeQ_g}\right)}\right\} = V_l \frac{dC_t}{dt}$$ ...Pers(3)

$$-\int_{C_0}^{C_t} \frac{dC_t}{C_t} = \frac{Q_g He}{V_l}\left\{1 - e^{-\left(\frac{K_L a V_l}{HeQ_g}\right)}\right\}\int_0^t dt$$ ...Pers(4)

$$ln\left(\frac{C_t}{C_0}\right) = \frac{Q_g He}{V_l}\left\{1 - e^{-\left(\frac{K_L a V_l}{HeQ_g}\right)}\right\}t$$ ...Pers(5)

Karena $\frac{K_L a V_l}{He Q_g} \ll 1$ maka persamaan (5) akan menjadi: (Demergenci, Nuri, & Yildiz, 2012)

$$-ln\left(\frac{C_t}{C_0}\right) = K_L at$$ ...Pers(6)

Dimana:

C_t : konsentrasi amonia pada saat waktu tertentu (ppm)

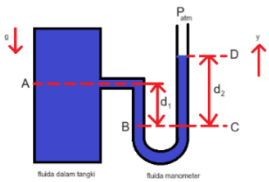
C_0 : konsentrasi amonia awal (ppm)

t : waktu (menit)

K_La : koefisien transfer massa ($menit^{-1}$)

8.3.5 Penerapan integral pada manometer-U

Contoh soal penerapan integral untuk menghitung tekanan didalam manometer-U (Welty, 2004)



Carilah tekanan di titik A (P_A) yang terjadi di dalam manometer-U pada gambar disamping dan dengan menggunakan persamaan di bawah ini: $\frac{dP}{dy} = -\rho g$

Langkah pertama, mengintegrasikan antara titik C dan D, sehingga akan diperoleh :

$$\int_{P_c}^{P_{atm}} dP = -\rho g \int_{C}^{D} dy$$

$$P_{atm} - P_{atm} = -\rho_m g(D - C) = -\rho_m g d_2 \quad \text{...Pers(1)}$$

Langkah kedua, megintegrasikan antara titik B dan A, sehingga akan diperoleh:

$$\int_{P_B}^{P_A} dP = -\rho g \int_{B}^{A} dy$$

$$P_A - P_B = -\rho_T g(A - B) = -\rho_T g d_1 \quad \text{...Pers(2)}$$

Karena tekanan di titik B (P_B) sama dengan tekanan di titik C (P_C), dan apabila persamaan (1) dan (2) dieliminasikan, maka akan diperoleh:

$$P_A - P_{atm} = \rho_m g d_2 - \rho_T g d_1 \quad \text{...Pers(3)}$$

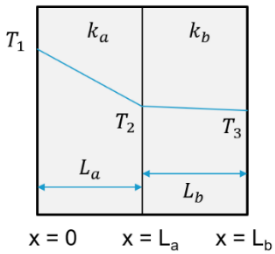
$$P_A = P_{atm} + \rho_m g d_2 - \rho_T g d_1 \quad \text{...Pers(4)}$$

Dimana:

P_A : tekanan fluida di titik A (N/m^2)
P_{atm} : tekanan atmosferik (N/m^2)
g : gaya gravitasi bumi (m/s^2)
ρ_m : densitas fluida di dalam manometer (kg/m^3)
ρ_T : densitas fluida di dalam tangka (kg/m^3)
d_1 & d_2 : jarak antara dua buah titik (m)

8.3.6 Penerapan integral pada transfer panas konduksi

Contoh soal penerapan integral dalam mencari *heat lost* transfer panas konduksi pada dinding seri (Welty, 2004)



Carilah persamaan *heat lost* (q) pada dinding komposit yang dirangkai secara seri antara dua buah dinding seperti pada gambar disamping dan dengan menggunakan persamaan di bawah ini:

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx}$$

Pertama-tama, lakukan integrasi terhadap x = 0 pada T = T_1 dan x = L_a pada T =T_2:

$\frac{q_x}{A}\int_0^{L_a} dx = -k_a\int_{T_1}^{T_2} dT$ ...Pers(1a)

$\frac{q_x}{A}(L_a - 0) = -k_a(T_2 - T_1)$ ...Pers(2a)

$\frac{q_x}{A}L_a = k_a(T_1 - T_2)$ ...Pers(3a)

$(T_1 - T_2) = q_x\left(\frac{L_a}{k_a A}\right)$ ...Pers(4a)

Kedua kita lakukan hal yang sama untuk mengintegrasikan terhadap x = L_a pada T = T_2 dan x = L_b = 0 pada T = T_3:

$\frac{q_x}{A}\int_0^{L_b} dx = -k_b\int_{T_2}^{T_3} dT$ ...Pers(1b)

$\frac{q_x}{A}(L_b - 0) = -k_b(T_3 - T_2)$ ...Pers(2b)

$\frac{q_x}{A}L_b = k_b(T_2 - T_3)$ ...Pers(3b)

$(T_2 - T_3) = q_x\left(\frac{L_b}{k_b A}\right)$ ...Pers(4b)

Apabila persamaan (4a) dan (4b) dieliminasikan maka akan diperoleh:

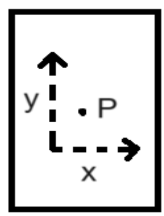
$$q_x = \frac{(T_1 - T_3)}{{}^{L_a}/_{k_a A} + {}^{L_b}/_{k_b A}}$$

Dimana:

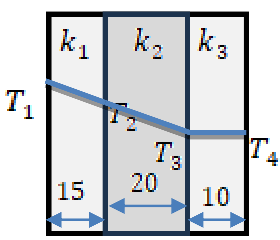
q_x : panas yang hilang karena konduksi (W K)
T_1 : temperatur pada permukaan dalam dinding komposit (K)
T_2 : temperatur pada permukaan luar dinding komposit (K)
L_a & L_b : tebal dinding komposit a dan b (m)
k_a & k_b : konstanta komposit a dan b (m)

Soal Latihan

1. Hitunglah luas permukaan yang dibatasi oleh persamaan $y = x^2$ dan persamaan $y = x$ dengan sumbu y
2. Hitunglah volume benda yang dibatasi oleh persamaan $y = x^2$ dan persamaan $y = x$ yang diputar terhadap sumbu y
3. Reaksi fase cair orde dua dan elementer dari A → B dilakukan dalam reaktor batch yang isothermal dan tercampur dengan baik. Mula-mula konsentrasi awal A adalah 10 mol/L. Jika laju reaksi A diberikan oleh $r_A = -kC_A$ dengan k = 0,69 jam^{-1}. Hitunglah waktu (menit) yang dibutuhkan sampai konsentrasi A mencapai 5 mol/L
4. Berapa konsentrasi ammonia yang keluar dari kolom gelembung pancaran pada saat 5 jam, apabila diketahui konsentrasi awal ammonia 350 ppm dengan harga koefisien transfer massa ammonia (K_La) = 0,6 jam^{-1}?



5. Carilah tekanan (P) statika fluida gas yang terjadi didalam tabung disetiap titik y seperti pada gambar disamping dengan asumsi menggunakan persamaan gas ideal $PV = \frac{m}{M_r} RT$
6. Sebuah dinding tungku terdiri dari tiga lapisan, 15 cm bata tahan api (k_1 = 1200 W/m K), diikuti oleh 20 cm bata insulasi kaolin (k_2 = 0,73 W/m K) dan terakhir 10 cm bata masory (k_3 = 5 W/m K). Temperatur pada permukaan dinding dalam adalah 1000 K dan pada permukaan luarnya adalah 500 K. Berapakah temperature pada permukaan kontak (T_2 dan T_3)?



Pembahasan Soal Latihan

1. $Luas = \int_0^1 \sqrt{y} - y\,dy$

$$= \frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{1}{6}$$

2. $Volume = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 - (y)^2 dy$

$$= \pi \left\{\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3\right\} = \frac{1}{6}\pi$$

3. $-kt = ln\left(\frac{C_A}{C_{A0}}\right)$

$$t = \frac{ln\left(\frac{5mol/L}{10mol/L}\right)}{-0{,}69jam^{-1}}$$

$$t = 1jam = 60\ menit$$

4. $C_t = C_0 \times e^{-K_L a \times t}$

$$C_t = 300ppm \times e^{-0{,}6jam^{-1} \times 5jam}$$

$$C_t = 17{,}4\ ppm$$

5. $ln\left(\frac{P}{P_{atm}}\right) = -\frac{M_r g}{RT}y$

$$P = P_{atm}e^{-\left(\frac{M_r g}{RT}y\right)}$$

6. Langkah pertama mencari harga q_x:

$$q_x = \frac{(T_1 - T_4)}{L_1/_{k_1 A} + L_2/_{k_2 A} + L_3/_{k_3 A}}$$

$$q_x = \frac{(1000 - 500)K}{\left(0{,}15/_{1200} + 0{,}2/_{0{,}75} + 0{,}1/_{5}\right)1/W}$$

$$q_x = 1743{,}4\ W\ K$$

Mencari T_2:

$$(T_1 - T_2) = q_x\left(\frac{L_1}{k_1 A}\right)$$

$$(1000 - T_2) = 1743{,}4\left(\frac{0{,}15}{1200}\right)$$

$$T_2 = 1000 - 1743{,}4\left(\frac{0{,}15}{1200}\right)$$

$$T_2 = 999{,}8\ K$$

Mencari T_3:

$$(T_3 - T_4) = q_x\left(\frac{L_3}{k_3 A}\right)$$

$$T_3 = 1743{,}4\left(\frac{0{,}1}{5}\right)$$

$$T_3 = 500 + 1743{,}4\left(\frac{0{,}1}{5}\right)$$

$$T_2 = 534{,}9\ K$$

DAFTAR PUSTAKA

Constanda, C., Riva, M. D., Lamberti, P. D., & Musolino, P. (2017). *Integral Methods in Science and Engineering, Volume 2.* Switzerland: Springer International Publishing AG.

Demergenci, N., Nuri, A. O., & Yildiz, E. (2012). Ammonia removal by air stripping in a semi-batch jet loop reactor. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*, 399-404.

Evans, G., & Machniewski, P. (1999). Mass transfer in a confined pluging liquid jet bubble column. *Chemical Engineering Science 54*, 4981-4990.

Harini, L. P., & Sari, K. (Mei 2020). Aplikasi Integral Dalam Bidang Ekonomi dan Finansial. *E-Jurnal Matematika, Vol. 9 (2)*, 143-148.

Missen, L., Mims, C., & Saville, B. (1999). *Introduction to Chemical Reaction Engineering and Kinetics.* New York: John Willey.

Nugroho, D. H., Adisalamun, & Machdar, I. (2014). Recovery of Ammonia Solutions From Fertilizer Industry Wastewater by Air Stripping Using Jet Bubble Column. *The 5th Sriwijaya International Seminar on Energy and Environmental Science & Technology* (pp. 102-108). Palembang: Universitas Sriwijaya.

Purnomo, D. (2021). *Kalkulus Integral.* Malang: Media Nusa Creative.

Reza, M., Behbahani, M., & Saramad, S. (2018). Integral-equation based methods for parameter estimation in output pulses of radiation detectors: Application in nuclear medicine and spectroscopy. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 7-12.

Ryan, N. C., & Wallace, D. (2017). *Applications of Calculus to Biology and Medicine.* New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Stroud, K., & Booth, D. J. (2003). *Matematika Teknik, Edisi Kelima, Jilid II.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Welty, J. R. (2004). *Dasar-Dasar Fenomena Transport, Volume 1 Transfer Momentum* (Vol. Volume 1). Jakarta: Erlangga.

Welty, J. R. (2004). *Dasar-Dasar Fenomena Transport, Volume 2 Transfer Energy.* Jakarta: Erlangga.

BIODATA PENULIS

Farman, S.Pd., M.Pd
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Sembilanbelas November Kolaka

Penulis lahir di Bau-Bau pada tanggal 11 Desember 1987. Menyelesaikan pendidikan di SD Negeri Wangkanapi tahun 2000, SMP Negeri 1 Bau-Bau tahun 2003 dan SMA Negeri 1 Bau-Bau tahun 2006, S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Halu Oleo tahun 2011. Memperoleh Beasiswa Unggulan (BU) S2 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang. Saat ini sedang menempuh S3 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya melalui program Beasiswa Pendidikan Indonesia (BPI). Tahun 2015 -2018 menjadi dosen tetap di Universitas Lakidende Unaaha dan dalam kurun waktu yang sama juga menjadi tenaga pengajar di SMK Tunas Husada Kendari dan SMK Dewi Sartika Kendari. Tahun 2018 hingga saat ini bekerja sebagai dosen tetap di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sembilanbelas November (USN) Kolaka. Kegiatan penelitian yang pernah dilakukan dan mendapat pendanaan dari hibah Penelitian Dosen Pemula (Tahun 2017, 2019) dan Program Kemitraan Masyarakat Stimulus (PKMS) Tahun 2019.
Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: farman.math@yahoo.co.id

BIODATA PENULIS

Juliana Pebrina Siburian, M.Pd
Dosen Program Studi Sosial Ekonomi Perikanan
Sekolah Tinggi Perikanan dan Kelautan Matauli

Penulis lahir di Medan tanggal 12 Juli 1989. Anak pertama dari 3 (tiga) bersaudara dari pasangan Bapak St. S. Siburian dan Ibu N. Br Panjaitan. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 Jurusan Pendidikan Matematika (2007 - 2011) dan melanjutkan S2 Jurusan Pendidikan Matematika (2012 - 2014). Penulis sudah aktif menjadi pengajar sejak tahun 2015 – 2018 di SMA Negeri 1 Matauli. Kemudian pada tahun 2018 – sekarang merupakan dosen tetap pada Program Studi Sosial Ekonomi Perikanan di Sekolah Tinggi Perikanan dan Kelautan Matauli. Penulis dapat dihubungi melalui email: juliana.siburian07@gmail.com

BIODATA PENULIS

Rindu Alriavindra Funny, S.Pd. M.Sc.
Dosen Program Studi Teknik Elektro
Bidang keahlian Matematika untuk Teknik
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Dirgantara Adisutjipto

Penulis lahir di Surabaya tanggal 15 November 1988. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Elektro Fakultas Teknologi Industri Institut Teknologi Dirgantara Adisutjipto. Dengan latar belakang S1 dan S2 Pendidikan Matematika, penulis fokus pada pendidikan matematika di bidang Teknik (*Mathematics for Specific Purposes*), khususnya matematika untuk teknik dirgantara. Walau belum banyak yang menekuni bidang ini, tetapi spesifikasi matematika untuk bidang teknik sangat dibutuhkan bagi pendidikan insinyur tingkat lanjut. Oleh karena itu, perlu adanya perhatian khusus bagi para pendidik bidang matematika yang memilih menekuni bidang ini.
Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: rindualri@itda.ac.id

BIODATA PENULIS

Winda Aprianti, M.Si
Dosen Program Studi D3 Teknologi informasi
Politeknik Negeri Tanah Laut

Penulis lahir di Martapura tanggal 17 April 1990. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Diploma Tiga Teknologi Informasi Politeknik Negeri Tanah Laut. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Matematika Universitas Lambung Mangkurat dan melanjutkan S2 pada Program Studi Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: winda@politala.ac.id.

BIODATA PENULIS

Veri Julianto, S.Si, M.Si
Dosen Program Studi Teknologi Informasi
Jurusan Komputer dan Bisnis
Publishing

Penulis lahir di Tanah Laut tanggal 11 Juli 1990. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Dosen Program Studi Teknologi Informasi Jurusan Komputer dan Bisnis. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Prodi Matematika di Universitas Lambung Mangkurat dan melanjutkan S2 pada Magister Sains Komputasi di Institut Teknologi Bandung. Penulis menekuni bidang menulis dalam pada topik matematika, statistik, algoritma dan struktur data, data mining, Sistem pendukung keputusan dan artificial inteligence. Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: veri@politala.ac.id/Hp. 0811518669

BIODATA PENULIS

Widiya Astuti Alam Sur, S.Pd.,M.Sc.
Dosen Program Studi Teknologi Rekayasa Konstruksi Jalan dan Jembatan Politeknik Negeri Tanah Laut

Penulis lahir di Gunturu, 14 Oktober 1991 . Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknologi Rekayasa Konstruksi Jalan dan Jembatan, Politeknik Negeri Tanah Laut. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika Universitas Negeri Makassar dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada. Penulis merupakan pengajar mata kuliah Kalkulus, Matematika Teknik, Matematika Keuangan, dan Statistika di Politeknik Negeri Tanah Laut. Selain mengajar, penulis juga aktif melakukan penelitian di bidang matematika, statistika, dan pembelajaran matematika.
Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: widiyasur@gmail.com

BIODATA PENULIS

Mardiati, S. Si., M.Pd

Penulis lahir di Nanggroe Aceh Darussalam, Kota Sigli, tanggal 22 Agustus. Penulis menyelesaikan pendidikan SD dan SMP di Kota P. Brandan Sumatera Utara, dan melanjutkannya di SMA Negeri Beureunuen Aceh Kabupaten Pidie. Penulis menyelesaikan S1 pada Jurusan MIPA Program Studi Matematika di Universitas Syiah Kuala Banda Aceh dan melanjutkan S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Medan. Saat ini Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP Budidaya sejak tahun 2005. Penulis mengampu mata kuliah Kalkulus Diferensial, Kalkulus Integral, dan Persamaan Diferensial Biasa, Metode Penelitian Pendidikan Matematika, Statistik Pendidikan, dan Strategi Pembelajaran Matematika di Program Studi Pendidikan Matematika.

BIODATA PENULIS

Didiek Hari Nugroho, S.T., M.T
Dosen Program Studi D4 Teknologi Kimia Industri
Jurusan Teknik Kimia – Politeknik Negeri Sriwijaya

Penulis Lahir di Maumere, 30 Oktober 1980, adalah alumni Sarjana (S1) Teknik Kimia Universitas Indonesia dan Magister (S2) Teknik Kimia Universitas Syiah Kuala. Selain itu juga merupakan alumni pada Program Drilling, Production and Liquidified Natural Gas Applied Competencies di Southern Alberta Institute of Technology (SAIT), Calgary, Canada; Program IVLP di Wright State University, Ohio, U.S.A; dan Program Wastewater Treatment di Environment Protection Training and Research Institute (EPTRI), Hyderabad, India. Penulis aktif mengajar di Program Studi D4 Teknologi Kimia Industri, salah satunya mata kuliah Kalkulus. Selain mengajar, penulis juga aktif menulis buku dan melakukan penelitian di bidang teknologi proses kimia dan pengolahan limbah industry. Berapa penelitian yang telah dilaksanakan oleh penulis dibiayai oleh DRPM Kemdikbudristek dan hasil penelitiannya juga diterbitkan di beberapa junal ilmiah nasional maupun internasional, buku, dan paten. Penulis sering juga di undang baik sebagai pembicara maupun konsultan yang merupakan bagian dalam melaksanakan kegiatan pengabdian kepada masyarakat. Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: dh.nugroho@polsri.ac.id