LANGSUNG TERBIT

KALKULUS 1

Alvian Sroyer, S.Si., M.Si. | Williza Yanti, M.Pd.
Mayor M. H. Manurung, S.Pd., M.Pd. | Abraham, M.Si. | Sumarni, S. Kom, M. Kom.
Wa Malmia, S.Pd., M.Si. | Dr. Fajriana, S.Si., M.Si. | Usman Tahir, ST. M.T.
Didiek Hari Nugroho, S.T., M.T. | Ibnu Maja, S.Si., M.M. | Tiku Tandiangnga, S.Si., M.Sc.

Editor : Weni Yuliani, S.Si., M.M

KALKULUS 1

Penulis:
Alvian Sroyer, S.Si., M.Si.
Williza Yanti, M.Pd.
Mayor M. H. Manurung, S.Pd., M.Pd.
Abraham., M.Si.
Sumarni, S. Kom, M. Kom.
Wa Malmia, S.Pd., M.Si.
Dr. Fajriana, S.Si., M.Si.
Usman Tahir ST. M.T.
Didiek Hari Nugroho, S.T., M.T.
Ibnu Maja, S.Si., M.M.
Tiku Tandiangnga, S.Si., M.Sc.

LANGSUNG TERBIT

LITERASI LANGSUNG TERBIT

KALKULUS 1

Penulis:
Alvian Sroyer, S.Si., M.Si.
Williza Yanti, M.Pd.
Mayor M. H. Manurung, S.Pd., M.Pd.
Abraham., M.Si.
Sumarni, S. Kom, M. Kom.
Wa Malmia, S.Pd., M.Si.
Dr. Fajriana, S.Si., M.Si.
Usman Tahir ST. M.T.
Didiek Hari Nugroho, S.T., M.T.
Ibnu Maja, S.Si., M.M.
Tiku Tandiangnga, S.Si., M.Sc.

Editor: Weni Yuliani, S.Si., M.M
Penyunting: Vanisa Sri Elvani, S.Si
Desain Sampul dan Tata Letak: Neza Sartika

Diterbitkan oleh:
Literasi Langsung Terbit
Anggota IKAPI No. 052/SBA/2024
Jl. Pasir sebelah No 30, Desa / Kelurahan Pasie Nan Tigo,
Kec. Koto Tangah, Kota Padang
Email : literasilangsungterbit@gmail.com
Website : www.langsungterbit.com

ISBN: 978-623-10-4443-3

Cetakan pertama, November 2024

KATA PENGANTAR

Puji syukur kita panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, atas terselesaikannya buku ini yang berjudul *Kalkulus 1*. Buku ini ditujukan bagi mahasiswa dan siapa pun yang ingin memahami konsep-konsep dasar kalkulus, yang merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang paling penting dan fundamental.

Kalkulus tidak hanya mempelajari angka dan rumus, tetapi juga menggali konsep yang mendalam mengenai perubahan dan akumulasi. Dalam dunia yang terus berkembang ini, pemahaman kalkulus menjadi semakin krusial, baik dalam bidang sains, teknologi, ekonomi, maupun dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu, buku ini diharapkan dapat memberikan wawasan yang jelas dan mendalam tentang berbagai topik yang berkaitan dengan kalkulus.

Buku ini disusun dengan sistematis, dimulai dari pendahuluan yang menjelaskan pengertian dan sejarah kalkulus, hingga topik-topik lanjutan seperti limit, turunan, dan integral. Setiap bab dirancang untuk membangun pemahaman secara bertahap, dengan dilengkapi latihan dan contoh untuk memudahkan pembaca dalam memahami materi.

Kami berharap buku ini dapat menjadi referensi yang bermanfaat bagi pembaca, dan dapat menginspirasi lebih banyak orang untuk mengeksplorasi keindahan serta kekuatan kalkulus. Terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung penyusunan buku ini. Semoga apa yang disajikan dalam buku ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jayapura, Oktober 2024
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1
PENDAHULUAN

A. Pengertian Kalkulus

Kalkulus merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari perubahan. Terdapat dua aspek utama dalam kalkulus: analisis perubahan fungsi (diferensial) dan perhitungan akumulasi perubahan tersebut (integral). Kalkulus berfungsi sebagai alat yang sangat penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan di bidang sains, teknik, ekonomi, dan disiplin ilmu lainnya.

Kalkulus terbagi menjadi dua bagian utama, yaitu kalkulus Diferensial dan kalkulus Integral. Kalkulus Diferensial berhubungan dengan konsep turunan (derivatif), yang digunakan untuk menganalisis bagaimana suatu fungsi berperilaku ketika variabel inputnya mengalami perubahan. Derivatif dapat membantu dalam menentukan laju perubahan atau kemiringan garis pada titik tertentu dalam grafik fungsi. Sebagai contoh, ini dapat digunakan untuk menghitung kecepatan sesaat sebuah kendaraan, yaitu bagaimana posisinya berubah seiring berjalannya waktu. Sementara itu, kalkulus integral berfokus pada konsep integral, yang pada dasarnya merupakan kebalikan dari diferensial. Integral digunakan untuk menghitung total perubahan, seperti luas area di bawah kurva suatu fungsi. Contoh aplikasinya adalah menghitung total jarak yang ditempuh oleh kendaraan dengan mengakumulasi perubahan posisi dari waktu ke waktu.

Kalkulus memiliki beragam aplikasi di berbagai bidang ilmu, termasuk Fisika, Teknik, Ekonomi, Biologi, dan Ilmu Komputer, serta bidang lainnya. Dalam Fisika, kalkulus digunakan untuk memodelkan gerakan objek, menentukan gaya yang bekerja, energi, dan banyak konsep lainnya. Contoh klasiknya adalah penerapan kalkulus dalam hukum Newton mengenai gerakan. Dalam bidang teknik, kalkulus dimanfaatkan dalam analisis sistem, optimisasi desain, dan kontrol proses. Sebagai contoh, kalkulus diferensial digunakan dalam analisis struktur untuk menentukan tegangan dan deformasi. Dalam disiplin Ekonomi, kalkulus berfungsi untuk mengoptimalkan keuntungan atau mengurangi biaya, contohnya dalam teori marginal dan analisis ekonomi. Sementara itu, dalam disiplin Biologi, kalkulus dimanfaatkan untuk memodelkan pertumbuhan populasi, penyebaran penyakit, serta proses-proses lain yang berkaitan dengan perubahan seiring waktu. Di bidang Ilmu Komputer, kalkulus diterapkan dalam algoritma yang memerlukan optimisasi, pengolahan sinyal, dan berbagai aplikasi lain yang membutuhkan analisis terhadap perubahan dalam data atau sistem.

B. Sejarah Singkat Kalkulus

Isaac Newton (1643–1727) mengembangkan kalkulus sebagai alat untuk menyelesaikan masalah dalam fisika, terutama dalam memahami gerakan dan gravitasi. Ia memanfaatkan kalkulus diferensial untuk menggambarkan perubahan kecepatan dan percepatan suatu objek seiring waktu. Selain itu, Newton juga menciptakan metode untuk menghitung luas di bawah kurva, yang kini dikenal sebagai integral. Salah satu sumbangan utama Newton adalah teorinya tentang fluxions, yang menjadi cikal bakal dari konsep turunan modern.

Isaac Newton (1643–1727) mengembangkan kalkulus sebagai alat untuk menyelesaikan masalah dalam fisika, terutama dalam memahami gerakan dan gravitasi. Ia memanfaatkan kalkulus diferensial untuk menggambarkan perubahan kecepatan dan percepatan suatu objek seiring waktu. Selain itu, Newton juga menciptakan metode untuk menghitung luas di bawah kurva, yang kini dikenal sebagai integral. Salah satu sumbangan utama Newton adalah teorinya tentang fluxions, yang menjadi cikal bakal dari konsep turunan modern.

Di sisi lain, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) secara bersamaan dengan Newton, mengembangkan konsep kalkulus dengan pendekatan yang lebih sistematis dan notasi yang lebih mendekati yang kita gunakan saat ini. Ia memperkenalkan simbol "d" untuk diferensiasi dan "∫" untuk integral, yang masih digunakan hingga kini. Leibniz lebih menekankan pada aspek simbolik dan formal dari kalkulus, serta mengembangkan aturan-aturan diferensiasi yang kini menjadi bagian penting dalam pembelajaran kalkulus. Meskipun terdapat perselisihan yang berkepanjangan mengenai siapa yang lebih dahulu menemukan kalkulus, baik Newton maupun Leibniz secara luas diakui sebagai pelopor utama kalkulus modern.

Setelah era Newton dan Leibniz, kalkulus mengalami perkembangan yang signifikan berkat kontribusi sejumlah matematikawan yang memperdalam dan menyempurnakan konsep-konsep dasarnya. Pada abad ke-18, tokoh-tokoh seperti Leonhard Euler dan Joseph-Louis Lagrange memperluas penerapan kalkulus dalam berbagai masalah matematika dan fisika. Euler, contohnya, memperkenalkan banyak notasi dan metode yang masih relevan hingga saat ini, serta memperluas aplikasi kalkulus ke dalam analisis fungsi kompleks. Lagrange, di sisi lain, menyempurnakan konsep turunan dan integral, serta mengembangkan kalkulus variasi, yang merupakan cabang kalkulus yang digunakan untuk menentukan fungsi yang memaksimalkan atau meminimalkan suatu kuantitas.

Pada abad ke-19, matematika mengalami formalitas yang lebih ketat. Augustin-Louis Cauchy dan Karl Weierstrass merupakan dua tokoh penting yang memberikan dasar yang lebih kokoh bagi kalkulus, terutama dalam hal konsep limit dan kontinuitas. Mereka menghilangkan ketidakpastian yang terdapat dalam karya-karya sebelumnya dengan mendefinisikan limit secara rigor. Weierstrass, khususnya, memperkenalkan definisi formal limit, yang kini menjadi landasan dalam pengajaran kalkulus diferensial dan integral.

Memasuki abad ke-20, kalkulus terus berkembang dan menjadi lebih kompleks dengan munculnya analisis matematika, yang memperluas konsep kalkulus ke dimensi yang lebih tinggi serta bidang lainnya, seperti geometri diferensial dan teori distribusi.

Kalkulus juga menjadi alat yang sangat penting dalam berbagai bidang lain seperti ekonomi, biologi, dan ilmu komputer, serta tetap menjadi subjek penelitian yang aktif dalam matematika murni dan terapan.

C. Konsep Dasar dan Notasi

1. Bilangan dan Fungsi

a. Bilangan riil

Bilangan riil mencakup semua bilangan yang dapat ditemukan pada garis bilangan, termasuk bilangan bulat, rasional, dan irasional. Contoh bilangan real adalah 2, -3, 0.5, dan $\sqrt{2}$.

b. Bilangan kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang memiliki bagian real dan bagian imajiner. Bentuk umum dari bilangan kompleks adalah a + bi, di mana a dan b adalah bilangan real dan i adalah unit imajiner yang memenuhi i^2 = -1.

c. Fungsi

Fungsi adalah relasi yang menghubungkan setiap elemen dalam satu set (disebut domain) dengan tepat satu elemen dalam set lain (disebut kodomain). Notasi fungsi biasanya ditulis sebagai *f(x)*, di mana *x* adalah elemen dari domain dan *f(x)* adalah elemen dari kodomain.

2. Limit

Limit adalah nilai yang didekati oleh fungsi ketika variabel mendekati suatu titik tertentu. Notasi limit ditulis sebagai $\lim_{(x \to c)} f(x) = L$, yang berarti bahwa *f(x)* mendekati *L* ketika *x* mendekati *c*.

Limit dapat dihitung dengan substitusi langsung, faktorisasi, menggunakan aturan L'Hôpital, atau dengan mendekati nilai dari kiri dan kanan (limit satu sisi). Limit adalah dasar dari banyak konsep kalkulus, termasuk turunan dan integral. Limit digunakan untuk mendefinisikan turunan sebagai laju perubahan sesaat dan integral sebagai jumlah total perubahan.

3. Turunan

Turunan dari suatu fungsi pada suatu titik adalah laju perubahan fungsi pada titik tersebut. Secara geometris, turunan adalah kemiringan garis singgung pada kurva fungsi di titik tersebut. Turunan dari fungsi *f(x)* dapat ditulis sebagai $f'(x)$, df/dx, atau *Df.* Definisi formal turunan adalah $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}$

Turunan digunakan untuk menemukan kecepatan dan percepatan dalam fisika, menentukan titik maksimum dan minimum fungsi dalam optimasi, dan menganalisis perubahan dalam ekonomi dan ilmu sosial.

4. Integral

Integral dari suatu fungsi menggambarkan akumulasi total dari nilai fungsi. Integral dapat dianggap sebagai luas di bawah kurva fungsi pada interval tertentu.

Integral ditulis sebagai $\int f(x)$ dx, di mana $\int$ adalah simbol integral, *f(x)* adalah fungsi yang diintegralkan, dan dx menunjukkan variabel integrasi. Integral tertentu (definite integral) ditulis dengan batas atas dan bawah, misalnya $\int_a^b f(x)$ dx . Integral digunakan untuk menghitung luas, volume, pekerjaan yang dilakukan oleh gaya, dan banyak aplikasi lainnya dalam fisika, teknik, dan ekonomi.

D. Pentingnya Kalkulus

1. Aplikasi Kalkulus dalam berbagai Bidang

Kalkulus merupakan alat fundamental dalam fisika yang digunakan untuk memodelkan dan menganalisis berbagai fenomena alam. Dalam mekanika klasik, kalkulus diferensial berperan dalam menentukan kecepatan dan percepatan yang dihasilkan dari perubahan posisi suatu objek seiring waktu. Sementara itu, kalkulus integral digunakan untuk menghitung berbagai hal, seperti kerja yang dilakukan oleh gaya atau medan gravitasi pada suatu objek. Contoh penerapannya termasuk menghitung lintasan planet yang mengorbit matahari atau menentukan perubahan energi kinetik suatu objek saat bergerak.

Dalam bidang teknik, kalkulus memiliki peranan penting dalam desain dan analisis berbagai sistem. Sebagai contoh, teknik sipil memanfaatkan kalkulus untuk menganalisis kekuatan struktur bangunan, teknik elektro menggunakannya untuk merancang sirkuit listrik, dan teknik mesin menerapkannya dalam analisis dinamika fluida serta termodinamika. Contoh aplikasinya meliputi penentuan beban maksimum yang dapat ditanggung oleh sebuah jembatan atau pengoptimalan desain mesin untuk efisiensi bahan bakar.

Kalkulus juga sangat krusial dalam ekonomi untuk memahami dan memprediksi perubahan yang terjadi. Kalkulus diferensial digunakan untuk menganalisis dampak perubahan dalam variabel tertentu, seperti harga atau jumlah produksi, terhadap output ekonomi, seperti keuntungan atau biaya. Di sisi lain, kalkulus integral digunakan untuk menghitung total keuntungan atau kerugian dalam periode waktu tertentu. Contoh aplikasinya termasuk menghitung elastisitas permintaan, yang menunjukkan sensitivitas permintaan terhadap perubahan harga, atau menghitung nilai sekarang dari aliran pendapatan di masa depan. Dalam ilmu komputer, kalkulus diterapkan dalam analisis algoritma, optimisasi, pengolahan sinyal, kecerdasan buatan, dan banyak aspek lainnya. Sebagai contoh, algoritma pembelajaran mesin sering kali memerlukan optimisasi yang melibatkan kalkulus diferensial untuk meminimalkan kesalahan prediksi. Contoh aplikasinya adalah merancang algoritma pengenalan gambar yang lebih efisien atau memaksimalkan throughput dalam jaringan komunikasi.

2. Kalkulus Penting bagi Mahasiswa di Berbagai Jurusan

Kalkulus memberikan wawasan yang mendalam mengenai mekanisme perubahan, yang merupakan elemen fundamental dalam berbagai disiplin ilmu. Dalam bidang fisika, biologi, ekonomi, maupun ilmu sosial, pemahaman tentang bagaimana variabel bertransformasi dan saling berinteraksi sangat penting untuk menganalisis serta menyelesaikan permasalahan yang kompleks. Kalkulus juga mengasah kemampuan pemecahan masalah dengan mengajarkan metode untuk mendekati dan menyelesaikan isu-isu yang melibatkan perubahan yang berkelanjutan. Keterampilan ini sangat berharga tidak hanya dalam sains dan teknik, tetapi juga dalam kehidupan sehari-hari serta karir di berbagai sektor. Berbagai teknologi modern dan inovasi ilmiah sangat bergantung pada kalkulus. Mahasiswa yang menguasai kalkulus memiliki alat yang diperlukan untuk berkontribusi dalam pengembangan teknologi baru, penelitian ilmiah, dan inovasi di industri.

Kalkulus merupakan fondasi bagi banyak cabang matematika dan sains lainnya, seperti persamaan diferensial, analisis matematika, dan mekanika kuantum. Oleh karena itu, mempelajari kalkulus adalah persiapan yang sangat penting bagi mahasiswa yang berencana untuk melanjutkan studi di bidang sains, teknologi, teknik, dan matematika (STEM). Kalkulus juga berperan dalam pengembangan kemampuan berpikir abstrak dan analitis. Keterampilan ini bermanfaat tidak hanya dalam matematika, tetapi juga dalam berbagai disiplin ilmu yang memerlukan pemikiran logis dan analisis yang mendalam. Konsep-konsep kalkulus sering kali muncul dalam kehidupan sehari-hari, seperti dalam memahami tingkat bunga, pertumbuhan populasi, dan banyak aspek lainnya. Memahami kalkulus dapat membantu individu dalam membuat keputusan yang lebih baik dan lebih terinformasi dalam kehidupan pribadi maupun professional.

E. Struktur Buku

Buku "Kalkulus 1" dirancang untuk memberikan pemahaman yang menyeluruh tentang konsep-konsep utama dalam kalkulus, mulai dari dasar hingga aplikasi yang lebih kompleks. Materi dalam buku ini disusun secara bertahap, dengan setiap bab membangun konsep-konsep yang telah dipelajari sebelumnya, sehingga memudahkan pembaca dalam mengikuti perkembangan materi.

Bab I. Pendahuluan, memberikan latar belakang dan pengenalan dasar tentang kalkulus, termasuk definisi, sejarah, dan pentingnya kalkulus dalam berbagai disiplin ilmu.

Bab II. Sistem Bilangan Riil, dalam buku kalkulus ini mencakup pembahasan tentang struktur dan sifat-sifat dasar dari bilangan riil.

Topik ini penting karena sistem bilangan riil adalah landasan dari hampir semua konsep dalam kalkulus.

Bab III. Fungsi dan Grafik, mengulas konsep fungsi, grafik, dan pentingnya pemahaman ini dalam kalkulus. Pembahasan tentang jenis-jenis fungsi, grafik mereka, dan bagaimana interpretasi visual dari grafik membantu dalam memahami perilaku fungsi.

Bab III. Limit, menjelaskan konsep limit yang merupakan dasar dari kalkulus diferensial dan integral.

Bab IV. Kontinuitas, bab ini membahas konsep kontinuitas dan bagaimana hal ini berkaitan dengan grafik fungsi.

Bab V. Definisi Turunan, bab ini memperkenalkan kalkulus diferensial, dimulai dengan definisi derivatif, aturan-aturan dasar diferensiasi. Topik-topik seperti turunan fungsi trigonometri, eksponensial, dan logaritma akan dibahas di sini.

Bab VI . Turunan Fungsi Aljabar, bab ini membahas topik-topik seperti turunan fungsi trigonometri, eksponensial, dan logaritma akan dibahas di sini.

Bab VII. Kemonotonan dan Kecekungan, bab ini membahas tentang Definisi Kemonotonan, fungsi monoton naik dan turun, Syarat Kemonotonan Berdasarkan Turunan, Definisi Kecekungan, cekung keatas dan kebawah, titik belok serta aplikasi kemonotongan dan kecekungan.

Bab VIII. Aplikasi Turunan, fokus pada berbagai aplikasi dari diferensiasi, seperti mencari nilai maksimum dan minimum fungsi, analisis grafik, dan aplikasi lainnya dalam fisika dan ekonomi.

Bab IX. Integrasi, mengulas konsep integral baik tak tentu maupun tentu, serta teknik-teknik dasar integrasi. Bab ini juga menjelaskan hubungan antara integral dan area di bawah kurva.

Bab X. Teknik Integrasi, membahas berbagai metode untuk menghitung integral, terutama untuk menyelesaikan integral yang tidak dapat diselesaikan secara langsung menggunakan integral dasar.

Seperti Teknik substitusi, Integrasi Parsial, Substitusi Trigonometri, Integrasi Fungsi Rasional, Teknik Penggantian Trigonometri Identitas dan Metode Integral Numerik.

Bab XI. Aplikasi Integrasi, bab ini membahas berbagai aplikasi integral dalam menghitung area, volume, panjang busur, serta aplikasi dalam bidang teknik dan ilmu pengetahuan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Adams, R. A., & Essex, C. (2017). *Calculus: A Complete Course* (9th ed.). Pearson.

Anton, H. (1992). *Calculus with Analytic Geometry* (edisi 5). John Wiley & Sons

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). Singapore. John Wiley & Sons.

Courant, R., & John, F. (1989). *Introduction to Calculus and Analysis* (Vol. 1). Springer-Verlag.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2007). *Calculus and Analytic Geometry* (3rd ed.). Pearson.

Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction* (3rd ed.). Pearson.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2009). *Kalkulus Jilid 1* (Edisi ke-9). Salemba Teknika.

Larson, R., Hostetler, P. & Edwards, B.H. (1990). *Calculus : with analytic geometry*. Lexington: D. C. Heath

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2003). *Vector Calculus* (5th ed.). W. H. Freeman

Purcell, E. J., & Varberg, D. (2007). *Kalkulus dan Geometri Analitis* (Jilid 1, Edisi ke-8). Jogjakarta: Erlangga.

Stewart, J. (2001). *Kalkulus : Konsep dan Konteks*. Erlangga.

Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.

Strang, G. (1991). *Calculus*. Wellesley-Cambridge Press.

Spivak, M. (2008). *Calculus* (4th ed.). Publish or Perish.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Thomas' Calculus* (13th ed.). Pearson

BAB 2
SISTEM BILANGAN RIIL

A. Pengantar Sistem Bilangan Riil

1. Definisi dan Representasi

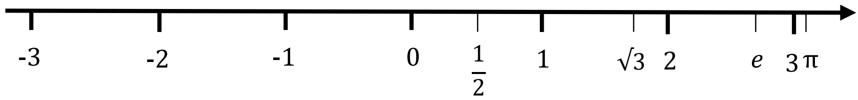
Sistem bilangan riil adalah kumpulan angka yang mencakup berbagai jenis bilangan yang digunakan dalam kalkulus dan analisis matematika. Bilangan ini meliputi bilangan bulat, pecahan, dan angka irasional, yang semuanya dapat direpresentasikan dalam bentuk desimal.

Bilangan riil dapat dinyatakan sebagai desimal, seperti:

- $-\frac{5}{8} = -0{,}625 \ldots$
- $\frac{2}{7} = 0{,}285714285714 \ldots = 0,\overline{285714}$
- $\sqrt{3} = 1{,}7320 \ldots$
- $\frac{1}{3} = 0{,}33333 \ldots = 0,\overline{6}$

Dalam contoh di atas, titik-titik (…) menunjukkan bahwa deret digit desimal berlanjut tanpa akhir. Setiap ekspansi desimal ini merepresentasikan bilangan riil, dan meskipun beberapa bilangan memiliki lebih dari satu representasi, seperti 0,999… dan 1,000…, semuanya tetap berhubungan dengan bilangan riil yang sama, yaitu 1.

Bilangan riil sering kali direpresentasikan dengan simbol $\mathbb{R}$, yang menunjukkan sistem bilangan riil atau garis bilangan riil. Garis bilangan riil adalah representasi grafis dari bilangan riil di mana setiap titik pada garis mewakili bilangan riil tertentu. Berikut adalah ilustrasi garis bilangan riil:



2. Sifat-Sifat Bilangan Riil

Sistem bilangan riil memiliki tiga kategori utama sifat, yaitu:

a. Sifat Aljabar: Sifat ini menyatakan bahwa bilangan riil dapat dijumlahkan, dikurangkan, dikalikan, dan dibagi (kecuali oleh 0) untuk menghasilkan bilangan riil lainnya. Contoh operasi dasar meliputi penjumlahan $a + b$ dan perkalian a × b, yang menghasilkan bilangan riil baru berdasarkan aturan aritmatika yang berlaku. Penting untuk diingat bahwa pembagian dengan 0 tidak diperbolehkan.

b. Sifat Urutan: Bilangan riil memiliki struktur urutan yang diatur, yang diuraikan dalam Lampiran 6. Salah satu aturan penting adalah bahwa mengalikan ketidaksetaraan dengan bilangan positif mempertahankan urutan, sementara mengalikan dengan bilangan negatif membalikkan urutan tersebut. Sebagai contoh, jika $a < b$, maka $a \times c < b \times c$ jika $c > 0$ dan $a \times c > b \times c$ jika $c < 0$.

c. Sifat Kelengkapan: Sifat ini merupakan aspek yang lebih dalam dan lebih sulit untuk didefinisikan secara tepat. Sifat kelengkapan menyatakan bahwa terdapat cukup banyak bilangan riil untuk "melengkapi" garis bilangan riil, sehingga tidak ada "lubang" atau "celah" dalam garis tersebut. Misalnya, tidak ada bilangan riil yang dapat memenuhi $x^2 = 2$ dalam bilangan rasional, karena tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya sama dengan 2. Sifat ini sangat penting dalam analisis limit dan berperan dalam banyak teorema kalkulus.

3. Operasi Bilangan Riil

Operasi bilangan riil adalah prosedur matematis yang melibatkan bilangan dalam sistem bilangan riil, termasuk bilangan rasional dan irasional. Operasi dasar dalam bilangan riil mencakup penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian, dan masing-masing memiliki definisi dan sifat yang spesifik.

a. Penjumlahan Bilangan Riil

Jika a dan b adalah bilangan riil, maka penjumlahan $a + b$ didefinisikan sebagai himpunan semua bilangan yang dapat dihasilkan dari menjumlahkan a dan b.

Teorema:

Jika $a$dan b adalah bilangan riil, maka hasil penjumlahan $a + b$ adalah bilangan riil.

Pembuktian:

1) Misalkan x adalah elemen dari $a + b$ Maka ada bilangan y dalam a dan z dalam b sehingga $x = y + z$.
2) Jika $y < x$ dan $z < 0$, maka $x + z < x$, sehingga $x + z$ juga merupakan bilangan riil.
3) Jelas bahwa $a + b \neq 0$, karena a dan b adalah bilangan riil yang tidak kosong.
4) Setiap elemen x dalam $a + b$ dapat dihasilkan dengan menjumlahkan elemen dari $\propto a$ dan b, sehingga penjumlahan bilangan riil menghasilkan bilangan riil.

b. Penjumlahan dengan Nol

Teorema:
Jika a adalah bilangan riil, maka $a + 0 = a$.

Pembuktian:
1) Jika x adalah elemen dari $\propto$ dan y adalah elemen dari nol (0), maka $y < 0$, sehingga $x + y < x$ dan $x + y$ juga merupakan elemen dari $\propto$.
2) Sebaliknya, jika x ada dalam a, maka terdapat bilangan rasional y dalam a sehingga $y > x$. Maka, $x = y + (x - y)$, di mana $x - y < 0$ dan ini menunjukkan bahwa x ada dalam $a + 0$.

c. Negatif Bilangan Riil

Jika a adalah bilangan riil, maka bilangan negatif dari a didefinisikan sebagai himpunan:

$$-a = \{x \in Q;\ -x \text{ tidak ada dalam } a, \text{tetapi} - x \text{ bukan elemen terkecil dari Q} - \text{ a}\}$$

Teorema:
Jika a adalah bilangan riil, maka $-a$ juga merupakan bilangan riil.

Pembuktian:

1) Misalkan x ada dalam $-a$ dan $y < x$. Karena $-x$ tidak ada dalam a, maka $-y$ juga tidak ada dalam a.
2) Juga jelas bahwa $-y$ bukan elemen terkecil dari $\mathbb{Q} - a$, karena $-x$ adalah elemen yang lebih kecil.
3) Dengan asumsi $a \neq 0$, ada bilangan x dalam a, sehingga $-x$ tidak mungkin ada dalam $-a$, yang menyimpulkan bahwa $-a \neq 0$.

d. Operasi Perkalian

Operasi perkalian bilangan riil juga diatur oleh sifat-sifat aljabar. Misalkan a dan b adalah bilangan riil, maka perkalian $a \times b$ adalah bilangan riil yang dihasilkan dari mengalikan a dan b.

Teorema:
Jika a dan b adalah bilangan riil, maka hasil perkalian $a \times b$ juga merupakan bilangan riil.

Bukti:
1) Mengikuti definisi dasar perkalian, jika a dan b adalah bilangan riil, maka hasilnya juga akan menjadi bilangan riil.
2) Misalnya, $3 \times 4 = 12$, di mana 12 adalah bilangan riil.

e. Operasi Pembagian

Pembagian juga merupakan operasi penting dalam sistem bilangan riil, dengan catatan bahwa pembagian dengan nol tidak terdefinisi.

Teorema:

Jika a dan b adalah bilangan riil dan $b \neq 0$, maka $\frac{a}{b}$ adalah bilangan riil.

Pembuktian:

1) Untuk $a = 6$ dan $b = 2$, kita memiliki $\frac{6}{2} = 3$, yang merupakan bilangan riil.
2) Pembagian dengan nol tidak diperbolehkan, sehingga $\frac{a}{0}$ tidak terdefinisi dalam sistem bilangan riil.

4. Subset Bilangan Riil

Dalam sistem bilangan riil, terdapat beberapa subset yang penting untuk dipahami:

a. Bilangan Asli: Bilangan yang terdiri dari 1,2,3,4,..., yang merupakan bilangan positif tanpa nol atau bilangan negatif.

b. Bilangan Bulat: Ini mencakup bilangan nol dan bilangan bulat negatif, misalnya $0, -1, -2, -3, \ldots$.

c. Bilangan Rasional: Bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{m}{n}$, di mana m dan n adalah bilangan bulat dan $n \neq 0$. Contoh bilangan rasional termasuk $\frac{1}{3}, -\frac{4}{9}$, dan $\frac{200}{13}$.

Bilangan rasional memiliki ekspansi desimal yang dapat berakhir (misalnya 0,75) atau berulang (misalnya 2,090909...). Sebaliknya, bilangan riil yang tidak dapat dinyatakan sebagai pecahan dikenal sebagai bilangan irasional. Contoh bilangan irasional adalah $\pi, \sqrt{2}$, dan $log_{10} 3$.

B. Notasi Himpunan dan Operasinya

Sebuah himpunan adalah kumpulan objek, dan elemen-elemen dari himpunan tersebut dapat dinyatakan dalam kurung kurawal. Dalam konteks bilangan riil, notasi ini sangat penting karena memungkinkan kita untuk menggambarkan berbagai subset dari bilangan riil dengan cara yang jelas dan sistematis.

Jika S adalah sebuah himpunan, notasi $a \in S$ berarti bahwa a adalah elemen dari himpunan S, sedangkan notasi $a \notin S$ berarti bahwa a bukan elemen dari himpunan tersebut. Misalnya, jika $\mathbb{Z}$ merepresentasikan himpunan bilangan bulat, maka $2 \in \mathbb{Z}$ tetapi $1.5 \notin \mathbb{Z}$.

1. Operasi Himpunan

Ada beberapa operasi dasar yang dapat dilakukan pada himpunan, yaitu:

a. Gabungan (*Union*): Jika S dan T adalah dua himpunan, maka gabungan/unifikasi $S \cup T$ adalah himpunan yang terdiri dari semua elemen yang ada di S, di T, atau di kedua himpunan tersebut. Contohnya, jika $S = \{1,2,3\}$ dan $T = \{3,4,5\}$, maka $S \cup T = \{1,2,3,4,5\}$.

b. Irisan (*Intersection*): Irisan dari dua himpunan S dan T, dilambangkan sebagai $S \cap T$, adalah himpunan yang terdiri dari elemen-elemen yang terdapat di kedua himpunan. Misalnya, dari contoh sebelumnya, $S \cap T = \{3\}$.

c. Selisih (*Difference*): Selisih antara himpunan S dan T, dilambangkan sebagai $S - T$, adalah himpunan yang berisi elemen-elemen yang ada di S tetapi tidak ada di T. Dengan contoh yang sama, $S - T = \{1,2\}$.

d. Himpunan Kosong (*Empty Set*): Himpunan kosong, yang dilambangkan dengan $\emptyset$, adalah himpunan yang tidak memiliki elemen sama sekali. Contohnya, irisan antara himpunan bilangan genap dan bilangan ganjil adalah himpunan kosong.

e. Notasi Himpunan Berbasis Aturan (*Set-Builder Notation*): Himpunan juga dapat dinyatakan menggunakan notasi berbasis aturan, yang mendefinisikan elemen-elemen himpunan dengan aturan tertentu. Misalnya, himpunan bilangan bulat positif kurang dari 7 dapat dinyatakan sebagai $A = \{x | x$ adalah bilangan bulat dan $0 < x < 7\}$.

2. Contoh Penerapan Notasi Himpunan

Misalkan kita memiliki himpunan A yang terdiri dari bilangan bulat positif kurang dari 5:

$$A = \{1,2,3,4\}$$

Himpunan B adalah himpunan bilangan genap kurang dari 8:

$$B = \{2,4,6\}$$

Dari kedua himpunan ini, kita dapat menentukan:

- Gabungan $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$
- Irisan $A \cap B = \{2,4\}$
- Selisih $A - B = \{1,3\}$

C. Interval dalam Sistem Bilangan Riil

Sistem bilangan riil terdiri dari berbagai himpunan yang membentuk interval, yaitu kumpulan angka yang terletak di antara dua angka tertentu. Sebuah himpunan di sepanjang garis riil disebut sebagai interval jika himpunan tersebut memuat minimal dua angka dan semua bilangan riil yang terletak di antara dua elemen tersebut. Sebagai contoh, himpunan semua bilangan riil x yang memenuhi $x < 6$ merupakan sebuah interval, sama halnya dengan himpunan xxx yang memenuhi $-2 < x < 5$. Di sisi lain, himpunan semua bilangan riil non-nol bukanlah sebuah interval, karena tidak mencakup angka 0 dan gagal untuk menyertakan semua bilangan riil di antara -1 dan 1.

Secara geometris, interval-interval ini dapat divisualisasikan sebagai segmen garis dan sinar pada garis bilangan riil. Interval yang bersesuaian dengan segmen garis adalah interval terbatas (*finite intervals*), sedangkan interval yang bersesuaian dengan sinar atau seluruh garis bilangan adalah interval tak terbatas (*infinite intervals*).

1. Jenis-jenis Interval

Interval terbagi menjadi beberapa jenis berdasarkan apakah termasuk atau tidaknya titik batas (*endpoints*). Berikut adalah klasifikasi interval:

a. Interval Terbuka (a, b): Termasuk semua bilangan x di antara a dan b, tetapi tidak termasuk a dan b.
b. Interval Tertutup [a, b]: Termasuk semua bilangan x di antara a dan b, serta juga termasuk a dan b.
c. Interval Setengah Terbuka [a,b): Termasuk a tetapi tidak termasuk b.
d. Interval Setengah Terbuka (a,b]: Termasuk b tetapi tidak termasuk a.
e. Interval Tak Terbatas (a, ∞): Semua bilangan yang lebih besar dari a.
f. Interval Tak Terbatas (−∞, b): Semua bilangan yang lebih kecil dari b.
g. Seluruh Garis Bilangan: Interval (−∞, ∞) yang mencakup semua bilangan riil.

Tabel berikut merangkum berbagai jenis interval:

Tabel 2. 1 Jenis Interval

Notasi	**Deskripsi himpunan**	**Notasi**
(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Interval Terbuka
[a,b]	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	Interval Tertutup
[a,b)	$\{x \mid a \leq x < b\}$	Interval Setengah Terbuka
(a,b]	$\{x \mid a < x \leq b\}$	Interval Setengah Terbuka
(−∞,b)	$\{x \mid x < b\}$	Interval Terbuka
(a,∞)	$\{x \mid x > a\}$	Interval Terbuka
(−∞,∞)	ℝ (Himpunan semua bilangan riil tanpa batas)	Himpunan Semesta

Untuk memahami lebih lanjut mengenai interval, berikut adalah gambar jenis interval terbuka dan interval tertutup:

Gambar 2. 1 Jenis interval (A) interval terbuka dan (B) interval tertutup (Sumber: Stewart, 2016)

2. Menyelesaikan Pertidaksamaan

Proses untuk menemukan interval atau beberapa interval yang memenuhi suatu ketidaksetaraan disebut sebagai menyelesaikan pertidaksamaan.

Saat menyelesaikan pertidaksamaan, ada beberapa aturan yang harus diperhatikan, yaitu:

a. Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$.
   Ini berarti kita bisa menambahkan angka yang sama pada kedua sisi pertidaksamaan tanpa mengubah arah pertidaksamaannya.

b. Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$.
   Dua pertidaksamaan dapat dijumlahkan, sehingga jika kita memiliki dua pertidaksamaan yang benar, kita dapat menjumlahkan kedua sisi masing-masing pertidaksamaan.

c. Jika $a < b$ dan $c > 0$, maka $ac < bc$.
   Ketika kita mengalikan kedua sisi pertidaksamaan dengan bilangan positif, arah pertidaksamaan tetap sama.

d. Jika $a < b$ dan $c < 0$, maka $ac > bc$.
   Namun, jika kita mengalikan kedua sisi pertidaksamaan dengan bilangan negatif, arah pertidaksamaan harus dibalik. Sebagai contoh, jika kita punya pertidaksamaan $3 < 5$, dan kita mengalikannya dengan -2, hasilnya menjadi $-6 > -10$.

e. Jika $0 < a < b$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
Ketika kita mengambil kebalikan dari dua bilangan positif, arah pertidaksamaan juga dibalik. Misalnya, jika $2 < 3$, maka $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

Aturan-aturan ini sangat berguna saat menyelesaikan pertidaksamaan, terutama ketika kita melakukan operasi dasar seperti penjumlahan, pengurangan, dan perkalian. Namun, perlu diingat bahwa jika kita mengalikan kedua sisi pertidaksamaan dengan bilangan negatif, karena hal itu akan mengubah arah pertidaksamaan. Misalnya, jika sebelumnya $a < b$, setelah dikalikan dengan bilangan negatif, pertidaksamaannya berubah menjadi $a > b$.

Contoh 1:

Selesaikan pertidaksamaan berikut: $2x - 2 < x + 2$

Penyelesaian:

Tambahkan 2 ke kedua sisi:

$$2x < x + 4$$

Kurangi x dari kedua sisi:

$$x < 4$$

Dengan demikian, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan ini adalah interval terbuka $(-\infty, 4)$ dan dapat digambarkan sebagai berikut:

Contoh 2:

Selesaikan pertidaksamaan $3 - 4x < 2x + 5$.

Penyelesaian:

Pertama, kita kurangi 5 dari setiap sisi pertidaksamaan (menggunakan Aturan 1 dengan c=−5):

$$3 - 5 - 4x < 2x$$

yang menghasilkan:

$$-2 - 4x < 2x$$

Kemudian, kita tambahkan $4x$ ke kedua sisi (menggunakan Aturan 1 dengan $c = 4x$):

$$-2 < 6x$$

Sekarang kita bagi kedua sisi dengan 6 (menggunakan Aturan 4, di mana $c = \frac{1}{6}$ dan arah pertidaksamaan tetap sama karena 6 adalah bilangan positif):

$$-\frac{2}{6} < \frac{6x}{6} = -\frac{1}{3} < x$$

Kita dapat menulis ulang pertidaksamaan ini menjadi:

$$x > -\frac{1}{3}$$

Dengan demikian, himpunan penyelesaian terdiri dari semua angka yang lebih besar dari $-\frac{1}{3}$. Dengan kata lain, penyelesaian dari pertidaksamaan ini adalah interval $(-\frac{1}{3}, \infty)$. Berikut adalah gambar dari himpunan penyelesaiannya:

Contoh 3:

Selesaikan pertidaksamaan berikut: $5 \le 4x - 3 \le 17$.

Penyelesaian:
Di sini, himpunan penyelesaiannya terdiri dari semua nilai x yang memenuhi kedua pertidaksamaan.
Menggunakan aturan yang diberikan, kita lihat bahwa pertidaksamaan berikut setara:

$$5 \leq 4x - 3 < 17$$

$$8 \leq 4x < 20 \text{ (ditambah 3)}$$

$$2 \leq x < 5 \text{ (dibagi dengan 4)}$$

Oleh karena itu, himpunan penyelesaiannya adalah $[2,5)$ dan berikut adalah gambarnya:

Contoh 4:

Selesaikan pertidaksamaan berikut: $x^3 - 2x^2 - 8x < 0$.

Penyelesaian:
Langkah pertama adalah memindahkan semua suku ke satu sisi dari tanda pertidaksamaan dan memfaktorkan ekspresi yang dihasilkan:

$$x^3 - 2x^2 - 8x < 0 \text{ atau } x\,(x^2 - 2x - 8) < 0$$

Selanjutnya, kita faktorkan $x^2 - 2x - 8$ menjadi $(x-4)(x+2)$. Sehingga kita memiliki:

$$x(x-4)(x+2) < 0.$$

Sekarang, kita cari nilai xxx yang membuat ekspresi ini sama dengan nol:

$$x(x-4)(x+2) = 0.$$

Solusinya adalah $x = 0, x = 4$, dan $x = -2$. Nilai-nilai ini membagi garis bilangan menjadi empat interval:

- $(-\infty, -2)$
- $(-2,0)$
- $(0,4)$
- $(4, +\infty)$

Sekarang, kita akan menentukan tanda dari hasil kali $x(x-4)(x+2)$ di setiap interval. Kita buat tabel berikut:

Tabel 2. 2 Himpunan penyelesaian interval

Interval	Tanda x	Tanda $x - 4$	Tanda $x + 2$	Tanda Hasil kali
$x < -2$	-	-	-	-
$-2 < x < 0$	-	-	+	+
$0 < x < 4$	+	-	+	-
$x > 4$	+	+	+	+

Dari tabel di atas, kita lihat bahwa hasil kali $x(x-4)(x+2)$ negatif (kurang dari nol) di interval:

- $(-2,0)$
- $(0,4)$

Jadi, himpunan penyelesaian pertidaksamaan ini adalah:

$$\{x \mid -2 < x < 0 \; atau \; 0 < x < 4\} = (-2,0) \cup (0,4).$$

DAFTAR PUSTAKA

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.
Stewart, J. (2016). *Calculus* (8th ed.). Cengage Learning.
Spivak, M. (2008). *Calculus* (4th ed.). Publish or Perish, Inc.

BAB 3
FUNGSI, GRAFIK FUNGSI, OPERASI PADA FUNGSI

A. Pendahuluan

Fungsi sangat erat kaitannya dengan berbagai kegiatan yang dilakukan sehari-hari. Pada keseharian acap kali melihat dua besaran yang saling bergantungan. Misalkan Harga jenis barang yang bergantung pada stok jumlah barang yang dihasilkan, posisi benda terhadap waktu, prediksi jumlah penduduk di suatu tempat untuk beberapa tahun ke depan, perubahan suhu ruangan yang terjadi dalam satu hari, dan sebagainya.

B. Definisi Fungsi

Andaikan setiap unsur dalam suatu himpunan D ditentukan lewat beberapa cara pada satu elemen tunggal dari himpunan K. Hal ini dinyatakan sebagai suatu fungsi sebagai berikut:

$$f : D \rightarrow K$$

dibaca "f adalah fungsi dari D ke K". Himpunan D disebut *domain* (ranah) dari fungsi f, dinotasikan D_f dan K disebut *co-domain* (koranah) dari f. Jika $\alpha \in D$ maka elemen dalam K yang ditentukan untuk α disebut peta (*image*) dari α, yakni:

$$f(\alpha)$$

yang berarti "f dari α". Dengan demikian ada 2 syarat utama untuk menyatakan fungsi, yaitu:

1) Harus ada dua himpunan

2) Aturannya, dimana semua anggota domain **tepat satu** dipasangkan dengan anggota co-domain.

Contoh 1: Misalkan *f* menetapkan untuk setiap bilangan riel R, $f(x) = x^4$. Domain dan kodomain dari *f* adalah bilangan-bilangan riel R, sehingga dapat ditulis

$$f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$$

image dari -2 adalah 16 ; ditulis $f(-2) = 16$ atau $f : -2 \rightarrow 16$.

Contoh 2: Misalkan ƒ menetapkan nama ibukota tiap-tiap provinsi di Indonesia. Disini domain ƒ adalah himpunan dari provinsi-provinsi di Indonesia; dan kodomain ƒ adalah daftar ibukota-ibukota di Indonesia. Image dari Provinsi Papua adalah Jayapura, yaitu, ƒ(Papua) = Jayapura.

Contoh 3: Misalkan $D = \{r, s, t, u\}$ dan $K = \{1, 2, 3, 4\}$. Definisikan sebuah fungsi ƒ dari D ke dalam K sebagai berikut $f(r) = 1$, $f(s) = 3$, $f(t) = 2$ dan $f(u) = 3$. Berdasarkan definisi ini maka image u adalah 3.

Contoh 4: Jika $f(x) = 2 - x$, tentukanlah

a. $f(-10)$

b. $f(-3)$

Jawab:

a. $f(-10) = 2 - (-10) = 12$

b. $f(3) = 2 - (3) = -1$

1. Range (Daerah Hasil/Jangkauan)

Jika *f* adalah *image* dari *D* ke dalam *K*, yaitu misalkan $f : D \rightarrow K$. Setiap elemen dalam K tidak perlu muncul sebagai *image* dari elemen D. Didefinisikan range dari elemen-elemen K yang tepat muncul sebagai image dari sekurang-kurangnya satu elemen dari *D*, dinotasikan *Rf*. Dapat diyatakan range dari $f : D \rightarrow K$ dengan { f(D) }

Contoh 1 : Tentukan domain dan range fungsi berikut ini:

a. $f(x) = 10x + 15$

b. $g(x) = x^2 - 5$

c. $g(x) = 2 + \sqrt{x + 1}$

d. $g(x) = \frac{3}{x}$

Jawab:

a. $D_f = \{x \in R\}, R_f = \{y|y \in R\}$
b. $D_g = \{x \in R\}, R_g = \{y|y \geq -5, y \in R\}$
c. Domain

Syarat *g(x)* terdefinisi : $x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$

$D_g = \{x|x \geq -1, x \in R\}$

Range : $R_g = \{y|y \geq 2, y \in R\}$

d. Syarat *f(x)* terdefinisi : $x \neq 0$

$D_g = \{x|x \neq 0, x \in R\}$

$R_g = \{y|y \neq 0, y \in R\}$

C. Grafik Fungsi

Grafik fungsi merupakan representasi visual dari suatu fungsi pada bidang kartesius, dimana setiap titik (*x, y*) mewakili pasangan terurut *(x, f(x)).*

1. Fungsi Linear dan grafiknya

Bentuk umum fungsi linier : *f(x)=mx + n*, dengan m,n konstan dan m≠ 0. Bentuk grafiknya berupa garis lurus. Mengsketsa grafik fungsi linier dapat dengan membuat tabel atau menentukan titik potong sumbu *x* dan sumbu *y.*

Contoh : Sketsalah grafik $y = -3x + 2$

Penyelesaian:

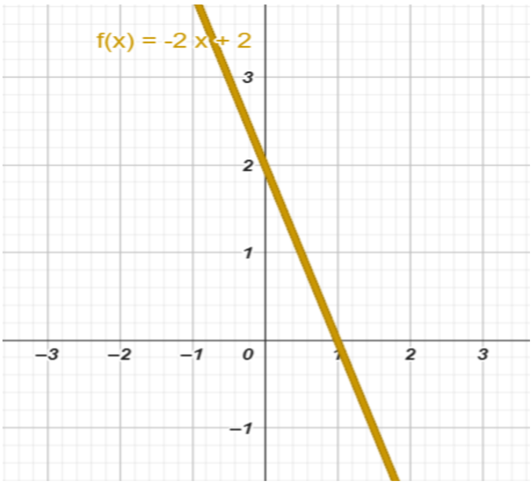
Cara 1. Menyusun dalam tabel: $y = -3x + 2$

x	-3	0	1
y	8	2	-1

Kemudian dihubungkan setiap titik-titik koordinat.

Cara 2. Titik potong sumbu x, dan titik potong sumbu y

x	$\frac{3}{2}$	0
y	0	2



Gambar 3. 1 Grafik Fungsi Linier
(Sumber: Geogebra)

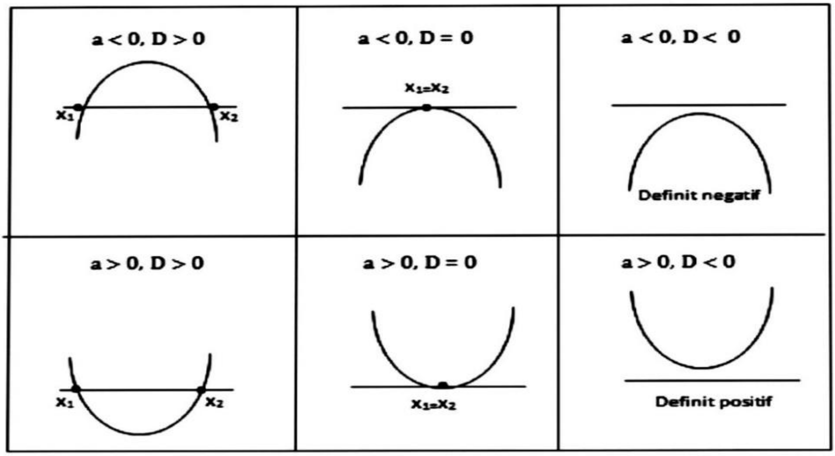
2. Fungsi Kuadrat dan Grafiknya

Bentuk umum :

$f(x) = ax\text{^}2 + qx + r$, untuk $a, q, r \in R, \ a \neq 0$.

Grafiknya berbentuk parabola. Untuk a > 0 (parabola terbuka ke atas), dan untuk a < 0 (parabola terbuka ke bawah).

Bentuk grafik berdasarkan nilai a dan D:



Gambar 3. 2 Grafik dengan bentuk parabola

Puncak dari parabola (P) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$y = ax^2 + qx + r$$
$$= a\left(x^2 + \frac{q}{a}x\right) + r$$
$$= a\left\{x^2 + \frac{q}{a}x + \left(\frac{q}{2a}\right)^2\right\} - \frac{q^2}{4a} + r$$
$$= a\left(x + \frac{q}{2a}\right)^2 - \frac{q^2 - 4ar}{4a}$$
$$= a\left(x - \left(\frac{-q}{2a}\right)^2\right) - \frac{q^2 - 4ar}{-4a}$$
$$= a(x - x_a)^2 + y_a$$

sehingga $P\left(\frac{-q}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$

Urutan mensketsa grafik fungsi kuadrat

$$y = ax^2 + qx + r$$

1) Pembuat nol fungsi, yakni $y = 0$
   Pembuat nol fungsi dari persamaan $y = ax^2 + qx + r$ adalah $ax^2 + qx + r = 0$. Didapatkan nilai x yang memenuhi $ax^2 + bx + c = 0$. Untuk menentukan titik potong dengan sumbu y, yaitu dengan mensubstitusikan nilai x ke dalam persamaan awal.
2) Tentukan sumbu simetri $x = \frac{-q}{2a}$
3) Tentukan titik puncak $P\ (x, y)$ dengan $x = \frac{-q}{2a}$ dan $y = \frac{D}{-4a}$
4) Mensketsa grafiknya

3. Fungsi Rasional dan Grafiknya

Fungsi rasional dirumuskan dalam bentuk $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ dimana $A(x)$ dan $B(x)$ adalah suku banyak dalam x dengan $B(x) \neq 0$.
Andaikan, $f(x) = \frac{3}{2x}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 5}$ dan $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 - 3x - 6}$
Apabila $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, maka nilai x yang menyebabkan $f(x) = 0$ disebut pembuat nol dari fungsi $f(x)$.

Ada berbagai jenis grafik fungsi rasional dimana grafik tersebut bergantung pada persamaan fungsinya. Berikut langkah- langkahnya:

a. Tentukan titik potong sumbu x dan sumbu y
b. Tentukan jenis asimptot :
   - Asimptot tegak, jika penyebut bernilai nol
   - Asimptot datar, jika $x \rightarrow \sim$
   - Asimptot miring, hanya untuk jenis fungsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya
c. Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif dan bernilai negatif
d. Tentukan nilai ekstrim fungsi (jika ada)
e. Tentukan titik-titik bantu (bila diperlukan)
f. Mensketsa grafiknya

Contoh 1:

Sketsalah grafik $f(x) = \frac{3x}{x^2+5x+4}$

Penyelesaian:

Langkah-langkah penyelesaian:

1) Menentukan titik potong kedua sumbu yakni (0,0)
2) Asimptot:

- tegak, diperoleh bila $x^2 + 5x + 4 = 0$

$$(x + 4)(x + 1) = 0$$

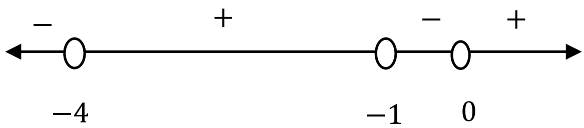
$$x = -4 \text{ atau } x = -1$$

  Asimptot tegak, x = - 4 dan x = - 1

- datar, $f(x) = y = \frac{3x}{x^2+5x+4} = \frac{x^2(\frac{3}{x})}{x^2(1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2})} = \frac{(\frac{3}{x})}{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}$

  Asimptot datar, $y = 0$

3) Menentukan tanda $f(x)$ pada selang



4) Nilai ekstrim

   Andaikan $f(x)$ mempunyai nilai ekstrim r, sehingga $r = \frac{3x}{x^2+5x+4}$

   $\Leftrightarrow r = rx^2 + 5rx + 4r - 3x = 0$
   $\Leftrightarrow rx^2 + (5r - 3)x + 4r = 0$

   Agar terdapat akar penyelesaian, maka $D \geq 0$ sehingga:

   $$(5r-3)^2 - 4r(4r) \geq 0 \Leftrightarrow 25r^2 - 30r + 9 - 16r^2 \geq 0$$

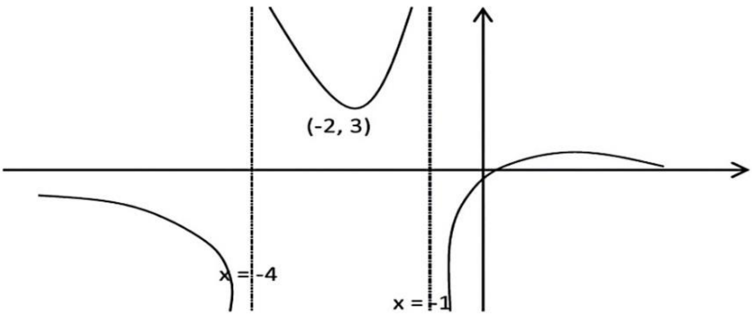
   Maka diperoleh $r = y \leq \frac{1}{3}$ $atau$ $r = y \geq 3$
   Ini berarti nilai ekstrim minimum $y = 3$ dan nilai ekstrim maksimum $y = \frac{1}{3}$

Dalam menentukan titik maksimum dan minimum, subtitusi nilai ekstrim maksimum dan minimum ke dalam $f(x)$, diperoleh titik ekstrim minimum $(-2{,}3)$ dan titik ekstrim maksimum $(2, \frac{1}{3})$.

5) Titik-titik bantu

x	-6	-5	-3	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-1\frac{4}{5}$	$-3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{5}$	$3\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{28}$

6) Sketsa grafik



Gambar 3. 3 Sketsa grafik untuk contoh 1
(Sumber: Geogebra)

D. Operasi pada Fungsi

1. Definisi Fungsi Penjumlahan

Jika $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan suatu fungsi, maka penjumlahan fungsi $(p+q)(x)$ didefiniskan sebagai :

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x)$$

Contoh:
Misalkan $p(x) = 2x + 3$ dan $q(x) = x2 - 1$
Maka $(p+q)(x) = (2x + 3) + (x2 - 1) = x2 + 2x + 2$

2. Definisi Fungsi Pengurangan

Operasi pada Fungsi Pengurangan merupakan kebalikan dari operasi penjumlahan fungsi, yang melibatkan pengurangan dua fungsi. Jika (x) dan (x) adalah dua fungsi, maka pengurangan dari fungsi- fungsi tersebut didefinisikan sebagai:

$$(p - q)(x) = p(x) - q(x)$$

Contoh:
Misalkan $p(x) = 2x - 3$ dan $q(x) = x + 10.$
Maka,

$$\begin{aligned} (p - q)(x) &= p(x) - q(x) \\ &= (2x + 3) - (x + 10) \\ &= x - 7 \end{aligned}$$

3. Fungsi Perkalian

Jika *p(⍰)* dan *q(⍰)* merupakan suatu fungsi, maka perkalian dari fungsi-fungsi tersebut didefinisikan sebagai:

$$(p \cdot q)(x) = p(x).\, q(x)$$

Contoh:
Jika $p(x) = 2x + 3$ dan $q(x) = x - 4$. Maka

$$\begin{aligned} (p \cdot q)(x) &= f(x).\, g(x) \\ &= (2x + 3)\,(x - 4) \\ &= 2x^2 - 5x - 12 \end{aligned}$$

4. Definisi Fungsi Pembagian

Jika $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan suatu fungsi, maka pembagian dari kedua fungsi tersebut didefinisikan sebagai:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ dengan } q(x) \neq 0$$

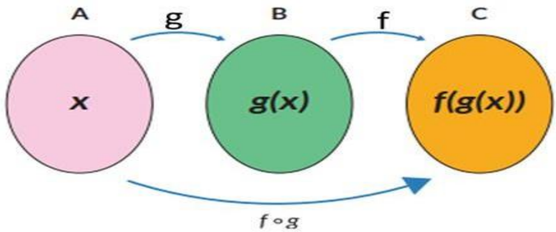
Contoh:
Dengan $p(x) = x + 3$ dan $q(x) = x^2 - 3x + 1$
Maka $\frac{p}{q}(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+1}$

5. Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi adalah operasi di mana satu fungsi diterapkan setelah fungsi lainnya.

Jika $g : A \rightarrow B\ dan\ f : B \rightarrow C$ merupakan dua fungsi maka komposisi keduanya $((x))$ dinyatakan dalam bentuk $(f \circ g)(x)$ adalah fungsi dari ranah A ke kodomain C.

Apabila f dan g adalah merupakan fungsi, maka komposisi f dengan g, yang ditulis sebagai $(fog)(x)$, didefinisikan sebagai:



Gambar 3. 4 Fungsi $(fog)(x) = f(g(x))$

Analog: $(gof)(x) = g(f(x))$

Contoh:
Jika $(x) = 2x + 4$ dan $(x) = x + 4$. Tentukanlah apakah $(f\ o\ g)(x) = (g\ o\ f)(x)$.

Penyelesaian:

$$(fog)(x) = ((x)) = f(x + 5)$$
$$= 2(x + 4) + 4$$
$$= 2x + 8 + 4$$
$$= 2x + 12$$

$$(gof)(x) = g\ ((x)) = (2x + 4)$$
$$= (2x + 4) + 4$$
$$= 2x + 4 + 4$$
$$= 2x + 8$$

Sehingga $(fog) \neq (gof)$

DAFTAR PUSTAKA

Susilowati, E. (2015). *Logika Matematika dan Himpunan*. Jogjakarta: Graha Ilmu.

Frank, A. J. R. & Elliot Mendelson. (2004). *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Purcell, Edwin J., Dale V., Steven E. R. (2011). *Kalkulus Edisi Kesembilan. Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Manurung, Mayor, & Ning, T. D. (2016). *Penguasaan Materi Matematika SMU Mahamahasiswa Semester 1 Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Cenderawasih*. Laporan Penelitian

BAB 4
LIMIT FUNGSI

A. Pendahuluan Limit

Dalam dunia matematika, khususnya dalam cabang kalkulus, konsep "limit" memegang peranan yang sangat penting. Limit fungsi merupakan dasar dari banyak konsep lain seperti turunan dan integral, yang pada gilirannya menjadi fondasi bagi berbagai aplikasi dalam ilmu pengetahuan, teknik, ekonomi, dan bidang-bidang lainnya. Memahami limit fungsi tidak hanya membantu kita dalam menganalisis perilaku fungsi pada titik-titik tertentu, tetapi juga memungkinkan kita untuk memahami perubahan dan dinamika yang terjadi dalam berbagai sistem. Secara intuitif, limit menggambarkan perilaku suatu fungsi saat variabel independennya mendekati suatu nilai tertentu. Dengan kata lain, limit membantu kita menjawab pertanyaan seperti "Apa yang terjadi pada nilai fungsi ketika kita mendekati titik tertentu?" atau "Bagaimana perilaku fungsi ketika variabelnya menuju tak hingga?". Konsep ini sangat berguna ketika kita menghadapi situasi di mana fungsi tidak terdefinisi secara eksplisit pada titik tersebut atau ketika kita ingin memahami tren umum tanpa harus menghitung nilai pasti.

Penggunaan limit tidak terbatas pada teori semata. Dalam dunia nyata, konsep ini diterapkan dalam berbagai situasi seperti menghitung kecepatan instan sebuah objek, menentukan laju perubahan dalam proses kimia, atau menganalisis perilaku pasar finansial. Dengan memahami dan menguasai konsep limit, kita dapat membangun alat analisis yang kuat untuk memecahkan masalah-masalah kompleks dan membuat prediksi yang lebih akurat tentang fenomena yang kita amati. Dalam materi ini, kita akan menjelajahi konsep dasar dari limit fungsi, termasuk definisi formalnya, sifat-sifat penting, dan metode-metode untuk menghitung limit. Kita juga akan melihat berbagai contoh dan aplikasi yang akan memperkuat pemahaman kita tentang bagaimana dan mengapa limit digunakan dalam matematika dan bidang-bidang terkait lainnya. Dengan pendekatan yang sistematis dan ilustratif, diharapkan pembaca dapat membangun fondasi yang kokoh untuk melanjutkan ke topik-topik kalkulus yang lebih lanjut.

Pandang fungsi yang ditentukan oleh rumus $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x-1}$. Perhatikan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisikan pada $x = 1$, karena dititik ini $f(x)$ berbentuk $\frac{0}{0}$, yang tanpa arti. Tetapi kita masih dapat menanyakan apa yang terjadi pada $f(x)$ bilamana x mendekati 1. Secara lebih tepat, apakah $f(x)$ mendekati beberapa bilangan tertentu bilamana x mendekati?Untuk sampai pada pertanyaan ini, kita telah melakukan tiga hal. Kita telah menghitung beberapa nilai $f(x)$ untuk $x$mendekat 1, kita telah menunjukkan nilai-nilai ini dalam sebuah diagram skematis, dan kita telah mensketsakan grafik $= f(x)$.

Semua informasi yang telah kita rakit kelihatannya menunjuk ke kesimpulan sama: $f(x)$ mendekati 3 bilamana x mendekati 1. Dalam lambang matematis, kita tuliskan:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Ini dibaca “limit dari$\frac{x^3-1}{x-1}$untuk x mendekati 1 adalah 3”.

Dengan menjadi seorang ahli aljabar yang baik (jadi mengetahui bagaimana menguraikan selisih pangkat tiga), kita menyediakan fakta-fakta yang lebih banyak dan lebih baik.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\,(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1)$$
$$= 1^2 + 1 + 1 = 3$$

Perhatikan bahwa$\frac{(x-1)}{(x-1)} = 1$ selama $x \neq 1$.Ini membenarkan langkah yang kedua.

Tabel 4. 1 Daftar nilai

x	$(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1,25	3,813
1,1	3,310
1,01	3,030
1,001	3,003
↓	↓
1,000	?
↑	↑
0,999	2,997
0,00	2,970
0,9	2,710
0,75	2,313

1. Definisi

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana *x* dekat tetapi berlainan dari *c*, maka *f(x)* dekat ke *L.* Perlu diperhatikan bahwa kita tidak mensyaratkan sesuatu agar benar di *c.* Fungsi *f* bahkan tidak perlu terdefinisi di *c*, juga tidak dalam contoh $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ yang baru saja ditinjau. Pemikiran tentang limit dihubungkan dengan perilaku suatu fungsi dekat *c,* bukannya di *c.* Beberapa contoh lebih lanjut akan membantu memperjelas pemikiran tersebut.

2. Contoh soal

   1) Carilah $\lim_{x \to 3}(4x - 5)$

      Penyelesaian:

      Bilamana *x* dekat 3, maka $(4x - 5)$ dekat terhadap $4.3 - 5 = 7$. Kita tulis:

      $$\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$$

   2) Carilah $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x+2) \quad = 3 + 2 = 5$$

3) Carilah $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (\sqrt{x}+1)$$

$$= \sqrt{1} + 1 = 2$$

B. Limit-limit Sepihak

Bilamana suatu fungsi mempunyai lompatan (seperti halnya $[\![x]\!]$ pada setiap bilangan bulat), maka limit tidak ada pada setiap titik lompatan. Untuk fungsi-fungsi yang demikian, adalah wajar untuk memperkenalkan **limit-limit sepihak**. Andaikan lambang x→0+ berarti bahwa *x* mendekati c dari kanan, dan andaikan x→0- berarti bahwa *x* mendekati *c* dari kiri.

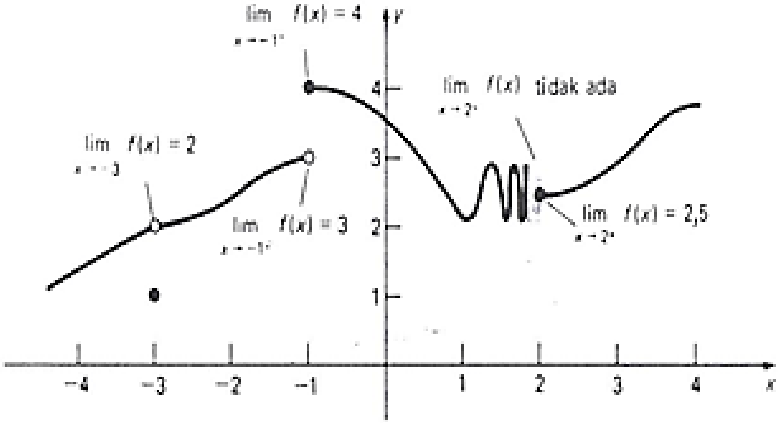
1. Definisi

(Limit kiri dan limit kanan). Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ 〖f(x)=L〗 berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kanan *c*, maka *f(x)* adalah dekat *L.* serupa untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c^-} f(x)$= L berarti bilamana *x* dekat tetapi pada sebelah kiri *c,* maka *f(x)* adalahdekat ke *L*.

2. Teorema A

$\lim_{x \to c^-} f(x)$ $\lim_{x \to c} f\,(x) = L$ jika dan hanya jika jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

Gambar berikut akan memberikan pemahaman yang lebih jelas:



Gambar 4. 1 Teorema A

C. Teorema Limit

Kebanyakan pembaca akan setuju bahwa membuktikan adanya limit dengan memakai definisi ε-δ dari subbab di depan, di samping memakan waktu juga sukar. Itulah sebabnya mengapa teorema-teorema dalam pasal ini disambut dengan baik. Teorema kita yang pertama sangat penting. Dengan teorema ini kita dapat menangani hampir semua masalah limit yang akan kita hadapi nanti.

Teorema A(*Teorema Limit Utama*)
Andaikan n adalah bilangan bulat positif, k adalah konstanta, dan f daan g adalah fungsi-fungsi yang memiliki limit di c. maka

1. $\lim_{x\to c} k = k$;
2. $\lim_{x\to c} x = c$;
3. $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$;
4. $\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$;
5. $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$;
6. $\lim_{x\to c}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x)$;
7. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, *asalkan* $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$;
8. $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$;
9. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, *asalkan* $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ *jika* n *genap.*

1. Penerapan Teorema Limit Utama

Dalam contoh-contoh berikut, nomor-nomor yang dilingkari mengacu terhadap pernyataan-pernyataan bernomor dari daftar yang diberikan sebelumnya.Setiap kesamaan dibenarkan oleh pernyataan yang ditunjukkan.

1) Carilah $\lim_{x\to 3} 2x^4$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 3} 2x^4 = 2 \lim_{x\to 3} x^4 = 2\,[\lim_{x\to 3} x]^4$$
$$= 2[3]^4 = 162 \blacksquare$$

2) Carilah $\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) = \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x = 3 \lim_{x\to 4} x^2 - 2 \lim_{x\to 4} x$$
$$= 3\,(\lim_{x\to 4} x\,)^2 - 2 \lim_{x\to 4} x$$
$$= 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

3) Carilah $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim\limits_{x \to 4} x}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + 9)}}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\lim_{x \to 4} x^2 + \lim_{x \to 4} 9}$$

$$= \frac{1}{4} = \sqrt{[\lim_{x \to 4} x]^2 + 9}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{4^2 + 9} = \frac{5}{4}$$

2. Teorema B (*Teorema Substitusi*)

Jikaf suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Asalkan dalam kasus fungsi rasional nilai penyebut di c tidak nol.
Contoh:

Carilah $\lim\limits_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$

D. Limit melibatkan Fungsi Trigonometri

Teorema B dari sub bab sebelumnya menyatakan fungsi polinomial selalu dapat dicari dengan substitusi, dan limit dari fungsi rasional dapat dicari dengan substitusi selama penyebutnya tidak nol pada titik limit. Aturan substitusi ini digunakan pada fungsi trigonometri dengan baik. Hasilnya dinyatakan berikut ini:

Teorema A (Limit fungsi trigonometri)

Untuk setiap bilangan real c dalam daerah asal fungsi

1. $\lim\limits_{t\to c} \sin t = \sin c$
2. $\lim\limits_{t\to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim\limits_{t\to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim\limits_{t\to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim\limits_{t\to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim\limits_{t\to c} \operatorname{cosec} t = \operatorname{cosec} c$

Teorema B (Limit trigonometri khusus)

1. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
2. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$

E. Limit-limit pada Tak Berhingga, Limit-limit Tak Hingga

1. Definisi (*Limit* $x \to \infty$)

Misalkan f didefinisikan pada $[c,\infty)$ untuk beberapa bilangan c. Kita mengatakan bahwa $f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan yang berkaitan M sedemikian sehingga $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Anda akan melihat bahwa M dapat bergantung pada ε. Secara umum, semakin kecil ε maka semakin besar M yang harus ada.

Contoh soal:

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim\limits_{x\to\infty} 1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

2. Definisi (Limit Tak Berhingga)

Kita mengatakan bahwa $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \infty$ jika untuk setiap bilangan positif M terdapat sebuah $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga:

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

F. Kekontinuan Fungsi

1. Definisi (Kekontinuan di suatu titik)

Kita mengatakan bahwa f **kontinu** di c jika beberapa selang terbuka di dekat c terkandung dalam daerah asal f dan

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Dengan definisi ini kita bermaksud mensyaratkan tiga hal:

a. $\lim\limits_{x\to c} f(x)\ ada$
b. $f(c)$ ada (yakni c berada dalam daerah asal)
c. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari ketiga syarat ini tak terpenuhi, maka f tak kontinu (diskontinu) di c. Tetapi kontinu di titik-titik lain dari daerah asalnya.

Contoh soal:

Andaikan $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$. Bagaimana seharusnya f didefinisikan di $x = 2$ agar kontinu di titik tersebut?

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Karena itu, kita definisikan $f(2) = 4$.

2. Kekontinuan Fungsi yang Banyak Dikenal

Sebagian besar fungsi yang akan kita jumpai dalam buku ini adalah kontinu di mana-mana atau di setiap titik terkecuali di beberapa titik.

a. Teorema A (Kekontinuan Fungsi Polinomial dan Rasional)
Fungsi polinom kontinu di setiap bilangan real c. Fungsi rasional kontinu di setiap bilangan real c dalam daerah asalnya, yakni kecuali di mana penyebutnya adalah nol.

Ingat kembali fungsi:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \Rightarrow x \text{ adalah fungsi polinom} \\ -x, x < 0 \Rightarrow -x \text{ adalah fungsi polinom} \end{cases}$$

Jadi menurut Teorema A, fungsi polinom $f(x) = |x|$ kontinu di semua bilangan yang berlainan dengan 0. Tetapi $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ karena itu, x juga kontinu di 0; $|x|$ kontinu di mana-mana.

b. Teorema B (Kekontinuan Nilai Mutlak dan Fungsi-fungsi Akar ke-n)
Fungsi nilai mutlak adalah kontinu di setiap bilangan real c. Jika n ganjil, fungsi akar ke n kontinu di setiap bilangan real c; jika n genap, fungsi ini kontinu di setiap bilangan real positif c

c. Teorema C
Jika f dan g kontinu di c, maka demikian juga kf, $f + g$, $f - g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ (asalkan $g(c) \neq 0$), f^n, dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan $f(c) > 0$ jika n genap).

d. Teorema D
Fungsi sinus dan kosinus adalah kontinu di setiap bilangan real c. Fungsi $tan\, x$, $cotan\, x$, $secan\, x$, dan $cosec\, x$ kontinu di setiap bilangan real c dalam daerah asalnya.

e. Teorema E (Teorema Limit Komposit)

Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan jika f kontinu di L, maka

$$\lim_{x \to c} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$

Khususnya, jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka fungsi komposit $f \circ g$ kontinu di c.

G. Latihan

1. Periksa bahwa yang berikut ini adalah kesamaan

   a. $(1+\sin z)(1-\sin z) = \frac{1}{\sec^2 z}$

   c. $\sec t - \sin t \tan\ t = cos\ t$

   b. $(\sec t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t$

   d. $\frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \sin^2 t$

2. Tentukan apakah fungsi-fungsi berikut ini merupakan fungsi ganjil, fungsi genap, atau tidak salah satunya:

   a. $t \sin t$

   c. $\csc t$

   e. x cos x

   g. $x + \sin x$

   b. $\sin^2 t$

   d. $\sin(\cos t)$

   f. sin x + cos x

3. Carilah limit berikut ini:

   a. $\lim\limits_{x\to 3}(x-5)$

   b. $\lim\limits_{t\to -1}(1-2t)$

   c. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x-1)$

   d. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x-1)$

   e. $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{1-2t}{\sqrt{3t+21}}$

   f. $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{\sqrt{1-2t}}{(3t+2)^3}$

4. Carilah limit berikut ini. Lakukan perhitungan aljabar terlebih dahulu jika diperlukan:

   a. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

   b. $\lim\limits_{t\to -7}\dfrac{t^2+4t-21}{t+7}$

   c. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x+1}$

   d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+2x^3-x^2}{x^2}$

5. Sketsakan grafik dari:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{jika} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{jika} \quad 1 < x < 2 \\ 5-x^2 & \text{jika} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Kemudian carilah masing-masing nilai berikut ini atau nyatakan jika tidak ada:

a. $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

b. $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

c. $g(1)$

d. $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

DAFTAR PUSTAKA

Purcell J. E. & Varberg D. (1993). *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jilid 1. Penerbit Erlangga.

Purcell J. E, Varberg D,&Rigdon E. S. (2004). *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Edisi kedelapan, Jilid 1. Penerbit Erlangga.

Chotim, M. (2005). *Kalkulus 2.* Semarang: Penerbitan FMIPA UNNES

BAB 5
KONTINUITAS LIMIT

A. Pendahuluan

Dalam kalkulus dan analisis matematika, konsep kontinuitas dan limit adalah dasar untuk memahami bagaimana fungsi berperilaku pada titik-titik tertentu dan pada interval. Singkatnya keduanya saling terkait dan krusial untuk menganalisis fungsi dan menerapkan konsep matematika yang lebih kompleks. Buku ini bertujuan untuk menjelaskan secara mendalam tentang kontinuitas dan limit serta aplikasi praktisnya dalam kalkulus.

Konsep kontinuitas dan limit merupakan fondasi penting yang memungkinkan kita untuk memahami perilaku fungsi dan perubahan dalam berbagai konteks matematis. Kontinuitas menggambarkan bagaimana suatu fungsi berperilaku tanpa adanya "lonjakan" atau "celah" pada interval tertentu, sementara limit membantu kita menganalisis perilaku fungsi saat mendekati titik tertentu atau saat mendekati tak hingga.

Secara intuitif, kontinuitas mengartikan bahwa grafik fungsi dapat digambar tanpa mengangkat pena dari kertas. Secara matematis, limit fungsi di suatu titik dikatakan kontinu jika nilai fungsi di titik tersebut mendekati nilai fungsi di titik itu., hal ini berarti bahwa jika limit fungsi saat mendekati titik tersebut sama dengan nilai fungsi di titik itu. Konsep ini sangat penting dalam berbagai aplikasi, mulai dari analisis matematika hingga model-model dalam ilmu pengetahuan dan teknik.

Di sisi lain, limit memberikan alat yang kuat untuk mengeksplorasi bagaimana fungsi berperilaku dalam skenario yang ekstrem atau dekat dengan titik tertentu. Limit memungkinkan kita untuk menentukan nilai fungsi ketika variabel mendekati nilai tertentu, meskipun fungsi tersebut mungkin tidak terdefinisi di titik itu sendiri. Dengan memahami limit, kita dapat mengevaluasi kestabilan, keberadaan, dan nilai-nilai yang mendekati titik yang kompleks atau dalam kondisi ekstrem.

Pemahaman yang mendalam tentang kontinuitas dan limit memfasilitasi studi lebih lanjut dalam kalkulus, terutama dalam diferensiasi dan integrasi, serta aplikasi-aplikasi matematis lainnya. Dengan alat-alat ini, kita dapat mengatasi tantangan-tantangan yang timbul dalam analisis matematis dan memperoleh wawasan yang lebih dalam tentang perilaku fungsi dalam konteks yang lebih luas.

B. Kontinuitas Limit

Limit fungsi adalah konsep dasar dalam kalkulus yang menggambarkan bagaimana nilai sebuah fungsi f(x) mendekati nilai tertentu saat variabel x mendekati suatu titik tertentu. Limit fungsi memberikan informasi penting tentang perilaku fungsi ketika x mendekati titik yang bisa jadi adalah titik di mana fungsi tidak terdefinisi atau memiliki sifat khusus. Ada beberapa jenis limit yang penting:

- Limit di titik tak tentu mengamati bagaimana *f(x)* berperilaku saat *x* mendekati nilai a.
- Limit tak hingga: ketika fungsi *f(x)* mendekati ∞ atau $-\infty$ saat *x* mendekati *a* atau *x* mendekati ∞ atau $-\infty$.
- Limit dari kiri dan kanan: Memeriksa perilaku fungsi dari arah kiri $(x \to a^-)$dan kanan $(x \to a^+)$

Kontinuitas adalah sifat dasar dari fungsi yang menjelaskan bagaimana fungsi berubah dengan mulus tanpa lonjakan atau kesenjangan. Kontinuitas di suatu titik memerlukan bahwa limit fungsi di titik tersebut ada dan sama dengan nilai fungsi di titik itu. Jadi, jika fungsi kontinu di $x = a$, maka:

$$lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ini berarti bahwa nilai limit di titik tersebut adalah nilai fungsi yang terdefinisi di titik tersebut. Maka disimpulkan bahwa jika nilai $lim_{x\to a} f(x)$ ada dan sama dengan nilai $f(a)$ maka fungsi $lim_{x\to a} f(x)$ dinyatakan kontinu di $x = a$.

Diskontinuitas titik terjadi apabila fungsi tidak terdefinisi di titik tersebut, atau jika limit tidak ada, atau jika limit ada tetapi tidak sama dengan nilai fungsi. Diskontinuitas lonjakan terjadi jika limit dari kiri dan kanan berbeda.

1. Fungsi kontinu
   Fungsi polinomial $f(x) = x^2$ kontinu di seluruh domainnya karena limit mendekati nilai fungsi pada setiap titik dalam domainnya.
2. Fungsi tidak kontinu
   Fungsi pecahan $f(x) = \frac{1}{x}$ tidak kontinu di $x = 0$ karena limit mendekati ∞ dan tidak terdefinisi pada $x = 0$.

Secara intuitif, fungsi *f* kontinu di *x* = *a* jika grafik fungsi di *x* = *a* tidak putus, tersambung dan sinambung. Karena itu *f*(*a*) harus didenifisikan:

Definisi : Andaikan f terdefinisi pada selang buka yang memuat a, fungsi f kontinu di a, jika dan hanya jika $\forall \varepsilon >$, $\exists \delta > 0$ sehingga $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ bila $0 < |x - a| < \delta$

Definisi di atas ekivalen dengan "f kontinu di a jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$" ini berarti ketiga syarat berikut harus terpenuhi.

1. Fungsi terdefinisi di $f(a)$ artinya $f(a)$ harus ada dan terdefinisi.
2. Limit fungsi $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ harus ada
3. Limit sama dengan nilai fungsi artinya $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Jika terdapat syarat yang tidak dipenuhi di atas, maka f dikatakan tidak kontinu di *a.* jika syarat 2 tidak dipenuhi, kita sebut f diskontinu loncat/asensial $\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada bias disebabkan limit sepihaknya tidak sama atau salah satu limit sepihaknya tidak ada. Jika syarat 3 tidak terpenuhi, kita dapat mendefinisikan fungsi f yang kontinu di $x = a$, yaitu :

$$F(x) = f(x) \quad : \quad x \neq a$$
$$\lim_{x \to a} f(x) \quad : \quad x = a$$

Contoh:

1) Selidikilah $f(x) = x + 2$ kontinu di $x = 1$

Penyelesaian:

1. $f(1) = 1 + 2 = 3$
2. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x + 2 = 1 + 2 = 3$
3. $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3$

Jadi $f(x) = x + 2$ kontinu di $x = 1$

$$f(x) = x^2 \text{ dan } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \; x = 2 \\ 3 \end{cases}$$

2) Buktikan kontinuitas fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ di $x = 2$!

Penyelesaian:

- Kontinuitas fungsi *f (x)* di *x* = 2.

a) $f(2) = 2^2 = 4$ (terdefinisi)
b) (2) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$ (ada)
c) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$ (syarat $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ dipenuhi)

Karena semua syarat di atas terpenuhi maka dapat dinyatakan bahwa $f(x)$kontinu di $x = 2$

- Kontinuitas fungsi *g (x)* di *x* = 2.

a) $g(2) = 3$ (terdefinisi)

b) $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} (x+2)$$

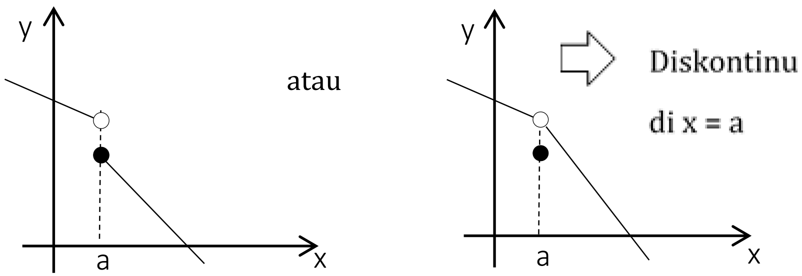
$$= 2 + 2$$

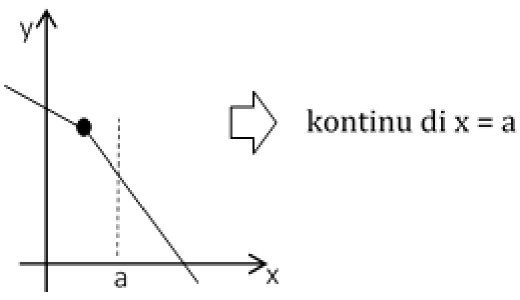
$$= 4 \qquad \text{(ada)}$$

c) $\lim_{x\to 2} g(x) \neq g(2)$ (syarat $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ tidak dipenuhi)

Karena syarat ketiga tidak dipenuhi maka dapat dinyatakan bahwa $g(x)$ diskontinu di $x = 2$.

Ilustrasi:





1. Kontinuitas Sepihak

Kontinuitas sepihak merujuk pada jenis kontinuitas yang hanya memperhatikan perilaku fungsi pada satu sisi dari titik tertentu, baik sisi kiri (kiri) maupun sisi kanan (kanan). Ini penting dalam konteks di mana fungsi mungkin tidak kontinu secara keseluruhan di titik tertentu tetapi mungkin kontinu saat mendekati titik tersebut dari satu arah.

Definisi :

1. Fungsi $f\ (x)$ dikatakan kontinu di $x = c$ dari sisi kiri jika
$$\lim_{x \to C^-} f(x) = f(c)$$
2. Fungsi $f\ (x)$ dikatakan kontinu di $x = c$ dari sisi kanan jika
$$\lim_{x \to C^+} f(x) = f(c)$$

Contoh soal:

Fungsi $f(x) = \begin{cases} |x-3| & , x \neq 3 \\ 0 & , x = 3 \end{cases}$ kontinu di $x = 3$ karena

$f(x) = \begin{cases} x-3 & , x > 3 \\ 3-x & x < 3 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ kontinu kiri dan kontinu kanan di $x = 3$ sebagai berikut:

- $f(x)$ kontinu kiri di $x = 3$, yaitu:
  1. $f(3) = 0$
  2. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (3 - x) = 0$
  3. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(3)$

- $f(x)$ kontinu kanan di $x = 3$, yaitu:
  1. $f(3) = 0$
  2. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 3) = 0$
  3. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(3)$

2. Kontinuitas Pada Satu Selang

Kontinuitas pada satu selang berhubungan dengan sifat fungsi yang kontinu di seluruh titik dalam suatu interval atau selang. Kekontinuan pada satu selang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi:

1. Fungsi f kontinu pada selang (a, b), jika f kontinu di setiap titik pada (a, b)
2. Fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$, jika f kontinu pada selang (a, b), kontinu kiri di b dan kontinu kanan di a
3. Fungsi f kontinu, jika f kontinu di setiap titik pada daerah asalnya

Teorema:

1. Jika fungsi f dan g kontinu di a, maka

   a) $f + g, f - g\ dan\ f \cdot g$ kontinu di a

   b) $\frac{f}{g},\ g(a)\ \neq 0$ kontinu di a

   c) $k \cdot f,$ kontinu di a, k konstan

2. Jika fungsi f dan g kentinu pada selang 1, maka:

   a) $f + g, f - g\ dan\ f \cdot g\ dan\ k \cdot f$ $(k$ konstan) kontinu pada selang I

   b) $\frac{f}{g},\ g(a)\ \neq 0\ \forall\ x \in I$. Kontinu pada selang I.

3. Teorema nilai antara(TNA)

   Misalkan fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$ dengan $x_1, x_2 \in [a, b]$. Andaikan $x_1 < x_2$ dan $f(x_1) \neq f(x_2)$ yaitu $f(x_1) < f(x_2)$. Jika $k \in R$ memenuhi $f(x_1) < f(x_2)$ maka ada $c \in (x_1 . x_2)$ sehingga $f(c) = k$.

4. Teorema Bolzano (akibat TNA)

   Jika fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$ dan $f(a).f(b) < 0$, maka ada $c \in (a, b)$ sehingga ada $f(c) = 0$

Contoh:

Misalkan f didefinisikan oleh $f(x) = \begin{cases} 2X - 3 & , x \leq 1 \\ x^2 & , x > 1 \end{cases}$. Tentukan daerah dimana f kontinu!

Jawab:

Peru diselidiki apakah titik $x = 1$ memenuhi ketiga syarat kontinuitas,

1. $f(1) = 2(1) - 3 = -1$ (terdefinisi)
2. $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada sebab $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$
3. $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

Jadi f tidak kontinu di $x = 1$

Kesimpulannya bahwa: f kontinu di $R - \{1\}$, sebab fungsi f yang bernilai $2x - 3$ dan x^2 merupakan fungsi polinom.

C. Kesimpulan

Limit fungsi adalah konsep dasar dalam kalkulus yang menggambarkan bagaimana nilai sebuah fungsi *f(x)* mendekati nilai tertentu saat variabel *x* mendekati suatu titik tertentu.

Ada beberapa jenis limit yang penting:

1. Limit di titik tak tentu mengamati bagaimana *f(x)* berperilaku saat *x* mendekati nilai *a*.
2. Limit tak hingga: ketika fungsi *f(x)* mendekati ∞ atau −∞ saat *x* mendekati *a* atau *x* mendekati ∞ atau −∞.
3. Limit dari kiri dan kanan: Memeriksa perilaku fungsi dari arah kiri *($x \to a^-$)*dan kanan *($x \to a^+$)*

Konsep kontinuitas dan limit merupakan fondasi penting yang memungkinkan kita untuk memahami perilaku fungsi dan perubahan dalam berbagai konteks matematis. Kontinuitas menggambarkan bagaimana suatu fungsi berperilaku tanpa adanya "lonjakan" atau "celah" pada interval tertentu, sementara limit membantu kita menganalisis perilaku fungsi saat mendekati titik tertentu atau saat mendekati tak hingga.

Suatu limit dikatakan kontinu jika ketiga syarat berikut terpenuhi:

1. Fungsi terdefinisi di $f(a)$ artinya $f(a)$ harus ada dan terdefinisi.
2. Limit fungsi $\lim_{x\to a} f(x)$ harus ada
3. Limit sama dengan nilai fungsi artinya $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Jika terdapat syarat yang tidak dipenuhi di atas, maka f dikatakan tidak kontinu di a. jika syarat 2 tidak dipenuhi, kita sebut f diskontinu loncat/asensial ($\lim_{x\to a} f(x)$ tidak ada bias disebabkan limit sepihaknya tidak sama atau salah satu limit sepihaknya tidak ada. Jika syarat 3 tidak terpenuhi, kita dapat mendefinisikan fungsi f yang kontinu di $x = a$, yaitu :

$$\begin{array}{lcl} F(x) = f(x) & : & x \neq a \\ \lim_{x\to a} f(x) & : & x = a \end{array}$$

Kontinuitas sepihak merujuk pada jenis kontinuitas yang hanya memperhatikan perilaku fungsi pada satu sisi dari titik tertentu, baik sisi kiri (kiri) maupun sisi kanan (kanan). Ini penting dalam konteks di mana fungsi mungkin tidak kontinu secara keseluruhan di titik tertentu tetapi mungkin kontinu saat mendekati titik tersebut dari satu arah.

Definisi:

1. Fungsi $f\ (x)$ dikatakan kontinu di $x = c$ dari sisi kiri jika

$$\lim_{x \to C^-} f(x) = f(c)$$

2. Fungsi $f\ (x)$ dikatakan kontinu di $x = c$ dari sisi kanan jika

$$\lim_{x \to C^+} f(x) = f(c)$$

Kontinuitas pada satu selang berhubungan dengan sifat fungsi yang kontinu di seluruh titik dalam suatu interval atau selang.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, F., & Mendelson, E. (2006). *Kalkulus*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Chiang, A., & Kevin. (2006). *Dasar-Dasar Matematika Ekonomi*. Jakarta: Erlangga.

Dedi, E., dkk. (2020). *Kalkulus*. Jakarta Timur: Bumi Aksara.

Indriyati, K. (2019). *Matematika Teknik*. Jakarta: Universitas Katolik Indonesia Atma Jaya.

Iswadi, H., & Asmawati, E. dkk. (2017). *Kalkulus*. Malang: Media Nusa Creative.

Nursiyono, E. A. (2023). *Kalkulus Lanjut*. Yogyakarta: Penerbit Andi.

Rany, P. D. (n.d.). *Matematika Terapan*. Jawa Tengah: Pustaka Rumah Cinta.

Razali, M., dkk. (2021). *Kalkulus Diferensial*. Medan: Umsu Press.

Sulistio, L. (2022). *Basic Calculus (Matematika Dasar)*. Jepara: Unisnu Press.

Samuel, H. (2020). *Matematika Ekonomi*. Depok: Rajagrafindo Persada.

Susilowati, S. E., dkk. (2023). *Kalkulus*. Yogyakarta: Bintang Semesta Media.

BAB 6
DEFINISI TURUNAN

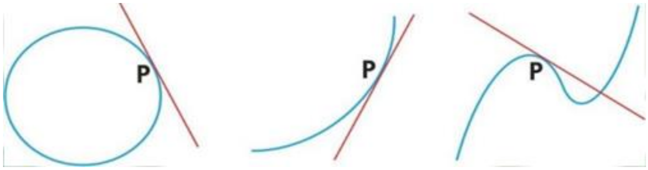
A. Pendahuluan

Dalam matematika, turunan suatu fungsi merupakan ukuran perbedaan reaksi dari nilai fungsi terhadap perubahan nilai suatu variabel. Misalnya, letak benda berpindah terhadap kecepatan benda bergerak terhadap waktu. (Wikipedia bahasa Indonesia, 2024).

Proses mencari turunan disebut antiturunan. Turunan dan integral merupakan 2 operasi awal pada kalkulus satu variabel. Teori turunan banyak dipakai pada beragam cabang ilmu matematika hingga Jurusan ilmu yang lain. Pada Jurusan ekonomi, turunan dipakai untuk memperkirakan biaya marginal, jumlah pendapatan, serta biaya produksi. Pada bidang biologi turunan digunakan untuk menghitung laju perkembangan mikroorganisme, dalam bidang fisika untuk menghitung kepadatan kawat, dalam bidang kimia untuk menghitung laju pembelahan, dalam bidang geografi untuk menghitung laju pertumbuhan populasi, dan masih banyak lagi. (Wikipedia bahasa Indonesia, 2024).

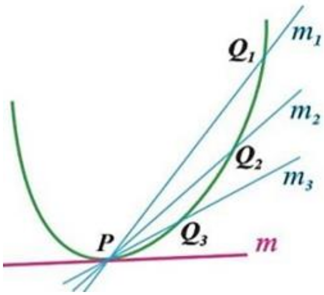
B. Garis Singgung

Secara informal, garis singgung adalah gagasan Euclid tentang garis yang menyentuh kurva hanya pada satu titik. (Gambar 6.1). Garis yang bersinggungan pada kurva di P lebih baik daripada garis yang dekat dengan kurva di P, namun masih ambigu dalam hal akurasi matematis.



Gambar 6. 1 Garis Kurva
(Sumber: Budiono, 2021)

Perhatikan titik P pada gambar 6.1 kurva bidang kartesius di atas, selanjutnya pada gambar tersebut merupakan garis singgung di titik P (Sesanti, 2019). Dalam kurva dapat di lihat bahwa titik P dan Q_1 disatukan oleh garis tali busur m_1. Selanjutnya perubahan titik Q_1 hingga mendekati titik P. Ketika sampai di titik Q_2 maka tali busurnya akan berubah menjadi garis m_2. Selanjutya jika diteruskan sampai titik Q_1 akan 'berdempet' dengan titik P serta tali busurnya menjadi garis singgung m seperti pada Gambar 6.2.



Gambar 6. 2 Garis Singgung
(Sumber: Budiono, 2021)

Definisi dari kemiringan garis singgung pada titik P = $(c, (c))$ sebagai berikut:

$$m = \lim_{h \to 0} m_{sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

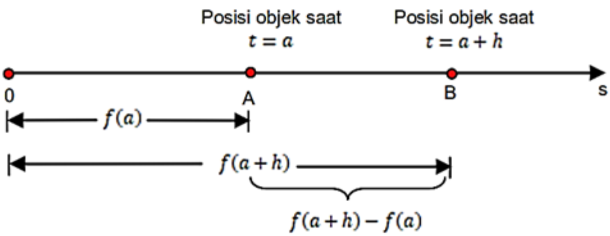
Contoh:
Tentukan kemiringan garis singgung pada garis lengkung (x) = x^2 pada titik x = 3.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
m_{tan} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{9+9h+h^2-9}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{9h+h^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(9+h)}{h}\\
&= 9
\end{aligned}
$$

C. Kecepatan Sesaat

Jika terdapat sebuah objek yang berjalan sepanjang garis lurus dan memenuhi persamaan $s = f(t)$ dan menyatakan jarak yang dilalui oleh objek dari titik awal sampai waktu. Simak gambar berikut:



Gambar 6. 3 Perpindahan objek
(Sumber: Rodliyah, 2020)

Sesuai dengan gambar 6.3 di atas, maka kecepatan rata-rata pada kedudukan A ke posisi B dapat ditentukan sebagai $\boldsymbol{v_s} = \frac{\boldsymbol{f(a+h)-f(a)}}{\boldsymbol{h}}$. Jika

$\boldsymbol{h \to 0}$ pada kecepatan sesaat dikatakan sebagai nilai limit dari kecepatan rata-rata yang dinyatakan sebagai: $\boldsymbol{v = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

Contoh:

Hitunglah kecepatan sesaat pada sebuah benda yang beranjak dari tempat diam $\boldsymbol{t = 2,5}$ detik yang ditetapkan pada fungsi $\boldsymbol{f(t) = 13t^2}$

Jawaban:

Misalkan kita hitung kecepatan di t = a detik

$$\begin{aligned}
v' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{13(c+h)^2-13c^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{13c^2+26ch+13h^2-13c^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{26ch+13h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(26c+13h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (26c + 13h) \\
&= 26c
\end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa, kecepatan pada t = 2, 5 detik adalah 26 (2, 5) = 65 meter/detik.

D. Definisi Turunan

Turunan fungsi f merupakan fungsi lain dari f ' (dibaca "f aksen") nilainya merupakan sebarang bilangan c adalah:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dengan syarat limit ini ada (Sucipto, 2021).

Jika ada limit maka di nyatakan bahwa f diferensiabel atau terdiferensial atau mempunyai turunan pada bilangan c. Sedangkan definisi turunan disembarang nilai x merupakan $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ andaikan limit ini ada, proses mencari derivatif disebut pendifferensial (Christina Eni Pujiastuti, 2022).

Berikut adalah beberapa contoh dalam mencari turunan.

Contoh:

1. Misalkan $f(x) = x - 2$, carilah $f'(2)$

Jawaban:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(2+h)-2]-[(2)-2]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

2. Misalkan $f(x) = x^2 + 5x$, carilah $f'(x)$

Penyelesaian:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2+5(x+h)]-[x^2+5x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh+2xh \quad +h^2+5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+2xh+h^2+5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + 2xh + h^2 + 5)$$

$$= 2x + 5 \text{ (Irmayanti, 2021)}$$

3. Tentukan turunan fungsi $5x^2 + 2$, tentukan $f'(x)$

Penyelesaian:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(x+h)^2+2-(5x^2+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(x^2+2xh+h^2)+2-5x^2-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5x^2+10xh+5h^2+2-5x^2-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{10xh+5h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(10x+5h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 10x + 5h$$

$$= 10x + 5 \cdot 0$$

$$= 10x + 0$$

$$= 10x$$

4. Tentukan Turunan Fungsi $8x^2 - 2x + 3$, tentukan $f'(x)$

Jawab:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8(x+h)^2-2(x+h)+3-(8x^2-2x+3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8(x+h)^2-2(x+h)+3-\left(8x^2-2x+3\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8\left(x^2+2xh+h^2\right)-2x-2h+3-8x^2+2x-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8x^2+16xh+8h^2-2x-2h+3-8x^2+2x-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{16xh+8h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(16x+8h-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 16x + 8h - 2 = 16x + 8 \cdot 0 - 2$$

$$= 16x - 2$$

E. Simbol Turunan

Ada banyak simbol untuk mengemukakan turunan yang dipopulerkan pada awal kemajuan kalkulus, dan beberapa simbol tersebut masih dipakai sampai sekarang ini.

1. Simbol Leibniz

Simbol *dx, dy*, dan $\frac{dy}{dx}$ dikembangkan Gottfried Wilhelm Leibniz pada tahun 1675. Simbol ini masih dipakai jika mempertimbangkan persamaan $y = f(x)$ dilihat sebagai relasi antara variabel dependent dan variabel independent. Turunan pertama serta simbol ini nyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx} \; atau \; \frac{d}{dx} f,$$

dan pertama adalah awalnya membandingkan dua besaran kecil ("*infinitely small*", "yang tak hingga kecilnya"). Turunan orde tinggi, yakni turunan ke-n dari $= f(x)$, ditulis sebagai

$$\frac{a^n y}{dx^n}, \frac{a^n f}{dx^n}, atau \; \frac{a^n}{dx^n} f$$

Simbol ini merupakan 'ringkasan' pada penggunaan penghubung turunan berlaku berulang. contohnya, simbol derivatif kedua

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Dengan memakai simbol Leibniz, turunan dari y pada titik $x = a$ dapat ditulis menjadi dua cara yang berlainan:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{dy}{dx}(a).$$

Dengan simbol Leibniz dimungkinkan untuk menuliskan peubah turunan (sebagai penyebut), yang berkontribusi terhadap turunan parsial. Simbol ini juga dapat dipakai untuk menentukan aturan rantai.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Selanjutnya, simbol Leibniz menggambarkan relasi aljabar peubah yang sama dengan analisisa pengukuran. Misalnya, turunan kedua $\frac{d^2y}{dx^2}$ mempunyai sama pengukuran seperti $\frac{y}{x^2}$ (Ariyanti, 2018).

2. Simbol Langrange

Simbol Langrange biasanya disebut sebagai simbol petik/prima (*prime notation*), merupakan suatu simbol derivatif yang di kenalkan oleh Joseph-Louis Lagrange. Simbol ini memakai simbol prima, sama dengan simbol petik. Turunan dari fungsi f dituliskan sebagai $\boldsymbol{f'}$. Demikian, derivatif kedua serta ketiga pada fungsi dinyatakan:

$$(\boldsymbol{f}')' = \boldsymbol{f}''\text{dan } (\boldsymbol{f}'')' = \boldsymbol{f}'''$$

simbol kedua dapat diperumum untuk memperoleh simbol $\boldsymbol{f^{(n)}}$ untuk derivatif ke-n dari $\boldsymbol{f}$. Simbol yang singkat serta sangat berfungsi ketika turunan kita anggap sebagai fungsi itu sendiri, tidak sama dengan simbol Leibniz juga beranggapan derivatif merupakan relasi sesama variabel. Angka fungsi turunan ke-n di $\boldsymbol{a}$ dilambangkan sebagai $\boldsymbol{f^{(n)}(a)}$ (Ariyanti, 2018).

3. Simbol Newton

Simbol Newton pada derivatif merupakan simbol titik ($_0$). Simbol ini memakai titik yang ditempatkan di atas nama fungsi, agar menunjukkan turunan yang menyatakan waktu. Jika , $\boldsymbol{y = f(t)}$, maka, $\dot{\boldsymbol{y}}$ dan $\ddot{\boldsymbol{y}}$ masing-masing mengatakan derivative pertama dan derivatif kedua dari. Simbol Newton pada saat ini hanya digunakan untuk derivatif terhadap waktu atau pada panjang busur, yang ditemukan pada persamaan diferensial dalam bidang ilmu fisika serta geometri diferensial.

4. Simbol Euler

Simbol yang dikembangkan oleh Leonhard Euler memakai penghubung diferensial $\boldsymbol{D}$, yang ketika digunakan dalam sebuah fungsi $\boldsymbol{D^n f}$ akan memperoleh turunan pertama $\boldsymbol{D_f}$. Derivatif ke-n serta simbol ini sebagai $\boldsymbol{D^n f}$. Jika $\boldsymbol{y = f(x)}$ adalah yaitu peubah dependent, maka ketika bawah $\boldsymbol{x}$ umum didekatkan ke $\boldsymbol{D}$ serta memperjelas $\boldsymbol{x}$ merupakan peubah independent. simbol Euler bisa ditulis sebagai $\boldsymbol{D_x y}$ atau $\boldsymbol{D_x f(x)}$. (Wikipedia bahasa Indonesia, 2024).

F. Langkah-Langkah Mencari Turunan

Berikut empat cara dalam menentukan Turunan dengan mencari $f'(x)$.

1. Menetapkan $f(x+h)$
2. Menetapkan pengurangan antara $f(x+h) - f(x)$
3. Membagi h untuk memperoleh $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. Ambil limit $h \to 0$, kemudian hitung $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Contoh:

Hitunglah turunan dari $\frac{3}{2x}$

Penyelesaian:

1. Menentukan $f(x+h) = \frac{3}{2(x+h)}$
2. Menentukan selisih $f(x+h) - f(x) = \frac{3}{2(x+h)} - \frac{3}{2x}$

$$= \frac{3x}{2(x+h)x} - \frac{3(x+h)}{2x(x+h)}$$

$$= \frac{3x-3x-3h}{2x(x+h)}$$

$$= \frac{-3h}{2x(x+h)}$$

3. Membagi langkah kedua dengan h, sehingga diperoleh hasil:

$$= \frac{\frac{-3h}{2x(x+h)}}{h} = \frac{-3h}{2x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-3}{2x(x+h)}$$

4. Ambil limit dari hasil langkah ketiga untuk nilai $h \to 0$, sehingga diperoleh hasil:

   $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{2x(x+h)} = \frac{-3}{2x(x+0)} = \frac{-3}{2x^2}$

   Jadi diperoleh turunan dari $\frac{3}{2x}$ adalah $\frac{-3}{2x^2}$

Catatan:

Jika diperintahkan untuk mencari nilai numerik dari $f'(x)$ di sembarang titik x, maka cukup memasukkan nilai x ke dalam hasil turunan tersebut.

Misal dari contoh 3, turunan $f(x)$ di $x = 3$ adalah $f(3) = \frac{-3}{2(3)^2} = \frac{-3}{2\cdot 9} = \frac{-3}{18} = -\frac{1}{6}$.

G. Aturan Mencari Turunan

1. Aturan Kostanta

Misalkan $f(x) = r$, dengan r suatu konstanta, akibatnya turunan pada sembarang x adalah $D_x\,(r) = 0$. Jadi, untuk setiap fungsi konstan, maka turunannya pada sembarang *x* adalah sama dengan nol (0).

Bukti :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{r - r}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Jadi, terbukti jika $f(x) = r$ maka $D_x(r) = 0$.

Contoh:

Tentukan derivatif fungsi dari $f(x) = 18$

Penyelesaian:

Berdasarkan Aturan Fungsi Konstanta, karena $f(x) = 18$ merupakan fungsi konstan, maka turunannya sama dengan nol (0).

2. Aturan Fungsi Satuan

Misalkan $\boldsymbol{f(x) = x}$, sehingga $\boldsymbol{f'\ (x) = 1}$; yaitu, $\boldsymbol{D_x\ (x) = 1}$.

Jadi, untuk setiap fungsi satuan $\boldsymbol{f(x) = x}$, maka turunannya adalah sama dengan satu (1).

Bukti:

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1}$$

Jadi, terbukti jika $\boldsymbol{f(x) = x}$ maka $\boldsymbol{D_x(x) = 1}$.

3. Aturan Pangkat

Misalkan $\boldsymbol{f(x) = x^n}$, dimana $\boldsymbol{n}$ bilangan bulat positif, sehingga $\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$, yaitu: $\boldsymbol{D_x(x^n) = nx^{n-1}}$.

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-1} + h^{n-1}]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} nx^{n-1}$$

Jadi, terbukti jika$f(x) = x^n$ maka $D_x(x^n) = nx^{n-1}$. Berdasar dengan Aturan pangkat, kita tidak harus lagi menentukan turunan dengan menggunakan definisi limit.

Contoh:
Carilah turunan fungsi $f(x) = x^5$

Penyelesaian:

$$f(x) = x^5, n = 5$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = 5x^{5-1}$$

$$f'(x) = 5x^4$$

Jadi, derivatif fungsi $f(x) = x^5$ yaitu $f'(x) = 5x^4$.

4. Aturan Kelipatan Kostanta

Misalkan k adalah konstanta dan f merupakan fungsi yang di turunkan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$, yaitu $D_x[k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x)$

Bukti:

Andaikan, $F(x) = k \cdot f(x)$, maka

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} k\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$F'(x) = k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$F'(x) = k \cdot f'(x)$$

Jadi, terbukti $D_x[k \cdot f(x)]$ maka $k \cdot D_x f(x)$

Contoh:

1) Tentukanlah $D_x(-7x^3)$

Penyelesaian:

$$D_x(-7x^3) = -7D_x(x^3)$$

$$D_x(-7x^3) = -7 \cdot 3x^{3-1}$$

$$D_x(-7x^3) = -7 \cdot 3x^2$$

$$D_x(-7x^3) = -21x^2$$

Jadi, $D_x(-7x^3)$ adalah $-21x^2$.

2) Tentukanlah $D_x(4x^3)$

Penyelesaian:

$$D_x(4x^3) = 4D_x(x^3)$$

$$D_x(4x^3) = 4 \cdot 3x^{3-1}$$

$$D_x(4x^3) = 4 \cdot 3x^2$$

$$D_x(4x^3) = 12x^2$$

Jadi, $D_x(4x^3)$ adalah $12x^2$.

5. Aturan Penjumlahan

Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka:

$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, yaitu $D_x[f(a) + g(a)] = D_a f(a) + D_a g(a)$

Bukti:

Andaikan, $F(a) = f(a) + g(a)$, sehingga

$$F'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$F'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h)}{h} - \frac{f(a) + g(a)}{h}$$

$$F'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$F'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$F'^{(a)} = f'(a) + g'(a)$$

Jadi, terbukti jika $D_a[f(a) + g(a)] = D_a f(a) + D_a g(a)$

Contoh:

1) Tentukan turunan dari $2x^3 + x^7$

Penyelesaian:

$$D_x(2x^3 + x^7) = D_x(2x^3) + D_x(x^7)$$

$$D_x(2x^3 + x^7) = 2D_x(x^3) + D_x(x^7)$$

$$D_x(2x^3 + x^7) = 2 \cdot 3x^{3-1} + 7x^{7-1}$$

$$D_x(2x^3 + x^7) = 6x^2 + 7x^6$$

Jadi, turunan dari $2x^3 + x^7$ adalah $6x^2 + 7x^6$.

2) Tentukan turunan dari $3x^3 + 7x^2 + 4x + 5$.

Penyelesaian:

$$D_x(3x^3 + 7x^2 + 4x + 5) = D_x(3x^3) + D_x(7x^2) + D_x(4x) + D_x(5)$$

$$D_x(3x^3 + 7x^2 + 4x + 5) = 3D_x(x^3) + 7D_x(x^2) + 4D_x(x) + D_x(5)$$

$$D_x(3x^3 + 7x^2 + 4x + 5) = 3 \cdot 3x^{3-1} + 7 \cdot 2x^{2-1} + 4 \cdot 1 + 0$$

$D_x(3x^3 + 7x^2 + 4x + 5) = 9x^2 + 14x + 4$

Jadi, turunan dari $3x^3 + 7x^2 + 4x + 5$ adalah $9x^2 + 14x + 4$.

6. Aturan Pengurangan

Misalkan p dan q merupakan fungsi-fungsi yang turunkan, sehingga:

$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$, yaitu $D_a[f(a) - g(a)] = D_a f(a) - D_a g(a)$

Bukti:

Misalkan $F(a) = f(a) - g(a)$, maka

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h} - \frac{f(a) - g(a)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - g(a)}{h} - \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$F'^{(a)} = f(a) - g'(a)$$

Jadi, terbukti jika $D_a[f(a) - g(a)] = D_a f(a) - D_a g(a)$

Contoh:

1) Tentukan turunan dari $3x^5 - 2x^2$.

Penyelesaian**:**

$$D_x(3x^5 - 2x^2) = 3D_x(x^5) - 2D_x(x^2)$$

$$D_x(3x^5 - 2x^2) = 3 \cdot 5x^{5-1} - 2 \cdot 2x^{2-1}$$

$$D_x(3x^5 - 2x^2) = 15x^4 - 4x$$

Jadi, turunan dari $3x^5 - 2x^2$ adalah $15x^4 - 4x$.

2) Carilah turunan dari $-x^3 - 9x^2 - 4x - 8$.

Penyelesaian:

$D_x(-x^3 - 9x^2 - 4x - 8) = D_x(-x^3) - D_x(9x^2) - D_x(4x) - D_x(8)$

$D_x(-x^3 - 9x^2 - 4x - 8) = 3D_x(-x^3) - 9D_x(x^2) - 4D_x(x) - D_x(8)$

$D_x(-x^3 - 9x^2 - 4x - 8) = 3 \cdot -1x^{3-1} - 9 \cdot 2x^{2-1} - 4 \cdot 1 - 0$

$D_x(-x^3 - 9x^2 - 4x - 8) = -3x^2 - 18x - 4$

Jadi, turunan dari $-x^3 - 9x^2 - 4x - 8$ adalah $-3x^2 - 18x - 4$.

7. Aturan Perkalian

Misalkan p dan q merupakan fungsi-fungsi yang turunkan, sehingga:

$(f \cdot g)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$ yaitu:

$$D_a[f(a)g(a)] = f(a)D_a g(a) + g(a)D_a f(a)$$

Bukti:

Misalkan $F(a) = f(a)g(a)$, maka

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - g(a)}{h} + \frac{g(a) \cdot f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(x)}{h} + g(a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$F'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$

Jadi, terbukti jika $D_a[f(a)g(a)] = f(a)D_a g(a) + g(a)D_a f(a)$.

Contoh:

1) Tentukan turunan dari $2x^5 \times 3x^2$

Penyelesaian:

$$D_x(2x^5 \times 3x^2) = 2x^5 D_x(3x^2) + 3x^2 D_x(2x^5)$$

$$D_x(2x^5 \times 3x^2) = 2x^5 \cdot 3 \cdot 2x^{2-1} + 3x^2 \cdot 2 \cdot 5x^{5-1}$$

$$D_x(2x^5 \times 3x^2) = 2x^5 \cdot 6x + 3x^2 \cdot 10x^4$$

$$D_x(2x^5 \times 3x^2) = 12x^6 + 30x^6$$

$$D_x(2x^5 \times 3x^2) = 40x^6$$

Jadi, turunan dari $2x^5 \times 3x^2$ adalah $40x^6$.

2) Carilah turunan dari $(3x^2 - 5)(2x^4 - x)$.

Penyelesaian:

$$D_x\{(3x^2 - 5)(2x^4 - x)\} \\ = (3x^2 - 5)D_x(2x^4 - x) + (2x^4 - x)D_x(3x^2 - 5)$$

$$D_x\{(3x^2 - 5)(2x^4 - x)\} \\ = (3x^2 - 5)(2 \cdot 4x^{4-1} - 1) \\ + (2x^4 - x)(3 \cdot 2x^{2-1} - 0)$$

$$D_x\{(3x^2 - 5)(2x^4 - x)\} = (3x^2 - 5)(8x^3 - 1) + (2x^4 - x)(6x)$$

$$D_x\{(3x^2 - 5)(2x^4 - x)\} = 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2$$

$$D_x\{(3x^2 - 5)(2x^4 - x)\} = 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

Jadi, turunan dari $(3x^2 - 5)(2x^4 - x)$ adalah $36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$.

8. Aturan Pembagian

Andaikan f dan g merupakan fungsi-fungsi yang di turunkan dengan $g(a) \neq 0$, sehingga

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

yaitu

$$D_x \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

Bukti:

Andaikan $F(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$, maka $F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-g(a)}{h}$

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h} F'(a)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(a)f(a+h) - f(a)g(a+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)}$$

$$P'(x) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(a)f(a+h) - g(a)f(a) + f(a)g(a) - f(a)g(a+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)}\right]$$

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \left\{\left[g(a)\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right] \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)}\right\}$$

$$F'(a) = [g(a)f'(a) - f(a)g'(a)] \cdot \frac{1}{g(a)g(a)}$$

$$F'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Jadi, terbukti jika $D_a \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{g(a)D_a f(a) - f(a)D_a g(a)}{g^2(a)}$

Contoh:

1) Tentukan turunan dari $\frac{d}{dx}\frac{(-3x^3+5)}{(2x)}$

Penyelesaian:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right] = \frac{(2x)\frac{d}{dx}(-3x^3+5) - (-3x^3+5)\frac{d}{dx}(2x)}{(2x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right] = \frac{(2x)(-3 \cdot 3x^{3-1}+0) - (-3x^3+5)(2)}{(2x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right] = \frac{(2x)(-9x^2) - (-3x^3+5)(2)}{(2x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right] = \frac{(-18x^3) - (-6x^3-10)}{4x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right] = \frac{-18x^3+6x^3-10}{4x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right] = \frac{-12x^3-10}{4x^2}$$

Jadi, turunan $\frac{d}{dx}\frac{(-3x^3+5)}{(2x)}$ adalah $\frac{-12x^3-10}{4x^2}$.

2) Tentukan turunan dari $\frac{d}{dx}\frac{(3x-5)}{(x^2+7)}$

Penyelesaian:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^2+7}\right] = \frac{(x^2+7)\frac{d}{dx}(3x-5) - (3x-5)\frac{d}{dx}(x^2+7)}{(x^2+7)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^2+7}\right] = \frac{(x^2+7)(3-0) - (3x-5)(1 \cdot 2x^{2-1}+0)}{(x^2+7)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^2+7}\right] = \frac{(x^2+7)(3) - (3x-5)(2x)}{(x^2+7)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^2+7}\right] = \frac{-3x^2+21-6x^2+10x)}{(x^2+7)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^2+7}\right] = \frac{-9x^2+10x+21}{(x^2+7)^2}$$

Jadi, turunan $\frac{d}{dx}\frac{(3x-5)}{(x^2+7)}$ adalah $\frac{-9x^2+10x+21}{(x^2+7)^2}$.

DAFTAR PUSTAKA

Ariyanti, N.L.A.& N. (2018) *Kalkulus*. Edited by S.B. Sartika. Sidoarjo, Jawa Timur: UMSIDA Press.

Budiono, D. (2021) *Menguasai diferensial Untuk Siswa SMA*. Pertama. Bandar Lampung: Arjasa Pratama.

Christina Eni Pujiastuti (2022) *Kalkulus Diferensial*. Jakarta: Program Studi Teknik Mesin Fakultas Teknologi Industri Universitas Trisakti.

Irmayanti, dkk (2021) *Teori-dan-Aplikasi-Kalkulus-Dasar.pdf*. Edited by Z. Razi. Pidie: Yayasan Penerbit Muhammad Zaini.

Rodliyah, S.S.& L. (2020) *KALKULUS DASAR Pendekatan Blended Learning*. Pertama. Edited by K. Ikhwan. Jombang: CV. AA. RIZKY.

Sesanti, N.R. (2019) *Dasar-Dasar Kalkulus*. Pertama. Malang: Ediide Infografika.

Sucipto, L. (2021) *Kalkulus Diferensial*. Pertama. Edited by D. Hidayati. Mataram: Sanabi.

Wikipedia bahasa Indonesia, ensiklopedia bebas https://id. wikipedia. org/wiki/Turuna. (2024) ‘Turunan’, pp. 1–18.

BAB 7
TURUNAN FUNGSI ALJABAR

A. Pendahuluan

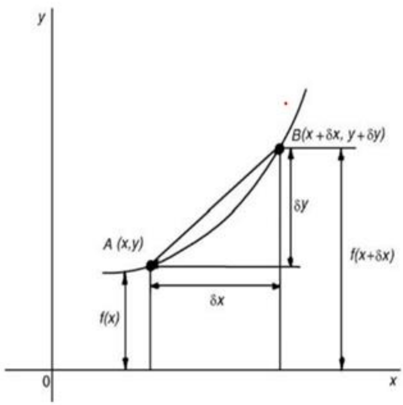
Turunan fungsi aljabar merupakan konsep penting dalam pembelajaran kalkulus yang berhubungan dengan laju perubahan suatu fungsi. Laju perubahan nilai fungsi meliputi laju perubahan rata-rata dan laju perubahan sesaat.

Pemahaman tentang turunan fungsi aljabar sering menjadi tantangan bagi peserta didik. Sehingga, dapat berdampak pada kemampuan peserta didik tersebut dalam memecahkan masalah matematika yang lebih kompleks.

B. Konsep Turunan Fungsi Aljabar

Pada bab sebelumnya telah membahas tentang definisi turunan yang bahwa laju perubahan dan kecepatan sesast merupakan salah satu penerapan dari turunan fungsi. Turunan adalah pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai yang dimasukkan. Secara Umum, turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan lainnya. Proses dalam menemukan turunan disebut diferensiasi.

Jika A dan B adalah dua titik yang sangat berdekatan pada kurva, δx (delta x) dan δy (delta y) yang masing-masing mewakili kenaikan kecil pada arah x dan y, maka:



Gambar 7. 1 Kurva

Gradien Tali busur $AB = \frac{\delta y}{\delta x}$ namun

$\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$.

Oleh karena itu,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Ketika δx mendekati nol, $\frac{\delta y}{\delta x}$ mendekati nilai batas dan gradien tali busur mendekati gradien garis singgung di titik A. Ketika menentukan gradien garis singgung pada kurva, ada dua notasi yang digunakan. Gradien garis singgung kurva di titik A pada gambar 1 dapat ditulis sebagai

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \right\}$$

Dalam Notasi Leibniz:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

Dalam notasi fungsional:

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \right\}$$

$\frac{dy}{dx}$ sama sebagai $f'(x)$ dan disebut koefisien diferensial atau turunan. Proses menemukan koefisien diferensial disebut diferensiasi. Turunan dari variabel y terhadap x dinotasikan dengan $\frac{dy}{dx}$ atau $\frac{df(x)}{dx}$ atau $f'(x)$ atau y' didefinisikan sebagai berikut:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+\mathrm{h}) - f(x)}{h}$$

dengan asumsi bahwa limit ini ada.

Contoh:

1) Andaikan $f(x) = 13x - 6$. Tentukan $f'(4)$

Penyelesaian:

$$f(x) = 13x - 6$$

$$f(x+h) = 13(x+h) - 6$$

$$f(4) = 13(4) - 6 = 46$$

Sehingga:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(4+h) - f(4)}{h} \right)$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{[13(4+h) - 6\,] - [13(4) - 6]}{h} \right)$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{[52 + 13h - 6\,] - [52 - 6]}{h} \right)$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{13h}{h} \right)$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} (13)$$

$$f'(4) = 13 \ \blacksquare$$

2) Jika $f(x) = 7x^3 + 6x$. Dapatkan $f'(c)$

Penyelesaian:

$$f(x) = 7x^3 + 6x$$

$$f(c+h) = 7(c+h)^3 + 6(c+h)$$

$$f(c) = 7c^3 + 6c$$

Sehingga:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \right)$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{[7(c+h)^3 + 6(c+h)] - [7c^3 + 6c]}{h} \right)$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{7[c^3 + 3c^2h + 3ch^2 + h^3 + 6(c+h)] - [7c^3 + 6c]}{h} \right)$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{21c^2h + 21ch^2 + 7h^3 + 6h}{h} \right)$$

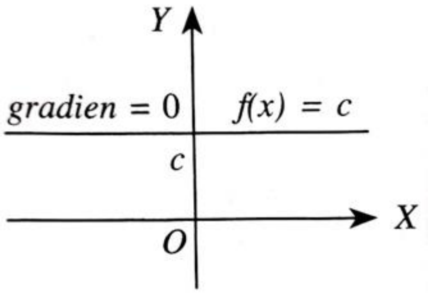
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h(21c^2 + 21ch + 7h^2 + 6}{h} \right)$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} (21c^2 + 21ch + 7h^2 + 6)$$

$$f'(c) = 21c^2 + 6 \blacksquare$$

Turunan fungsi Aljabar adalah fungsi baru hasil penurunan pangkat dari fungsi sebelumnya menurut aturan yang ditetapkan. Jika diimplementasikan dalam grafik fungsi, turunan ini merupakan gradien garis singgung terhadap grafik di titik tertentu. Tingkat turunan fungsi tidak terbatas pada satu tingkat saja, tetapi juga bisa dua tingkat, tiga tingkat, dan seterusnya.

Konsep turunan setiap tingkatnya juga sama. Hanya saja fungsi yang diturunkan berbeda-beda karena mengacu pada hasil turunan sebelumnya.



Perhatikan $y = f(x) = c$ dengan c suatu konstanta grafik. Jika $f(x) = c$ dilukiskan sebagai garis lurus mendatar yang sejajar sumbu X dengan gradien 0 (dapat dilihat dari gambar 2. Karena gradiennya 0, hal ini berarti $f'(x) = m = 0$.

Gambar 7. 2 Grafik fungsi $\boldsymbol{f(x)}$

C. Sifat Sifat Turunan Fungsi Aljabar

Turunan fungsi aljabar mempunyai sifat-sifat tertentu. Berikut sifat-sifat yang digunakan pada turunan fungsi aljabar :

1. Turunan fungsi Konstanta

$Jika\ f(x) = a,$ a adalah suatu konstanta untuk semua x, maka $f'(x) = 0$, untuk semua x, yaitu : $D_x(a) = 0$

Bukti:

Karena $f(x + h) = f(x) = c$, maka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{c - c}{h}\right) = 0 \blacksquare$$

2. Turunan Fungsi Linier

$Jika\ f(x) = ax + b$, maka $f'(x) = a$, yaitu

$D_x(ax + b) = a$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{[a(x+h)+b]-[ax+b]}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{ax+ah+b-ax-b}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{ah}{h}\right)$$

$$f'(x) = a\blacksquare$$

3. Turunan Fungsi Pangkat

$Jika\ n$ adalah bilangan bulat positif dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$, atau $D_x(ax^n) = nx^{n-1}$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots . + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n - x^n}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots . + nxh^{n-1} + h^n}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots . + nxh^{n-2} + h^{n-1}}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots . + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right)$$

$$f'(x) = nx^{n-1}\blacksquare$$

4. Turunan Jumlah

Jika $f(x) = u(x) + v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ atau $D_x(u(x) + v(x)) = D_x\big(u(x)\big) + D_x(v(x))$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)\blacksquare$$

5. Turunan Selisih

Jika $f(x) = u(x) - v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) - v'(x)$ atau $D_x(u(x) - v(x)) = D_x\big(u(x)\big) - D_x(v(x))$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h) - v(x+h) - u(x) + v(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) - \lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = u'(x) - v'(x)\blacksquare$$

6. Turunan untuk operasi perkalian

Jika $f(x) = u(x).v(x)$, maka

$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$ atau

$D_x\big(u(x).v(x)\big) = D_x\big(u(x)\big).v(x) + u(x).D_x(v(x))$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h).v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h).v(x+h)+u(x+h)v(x)-u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(v(x+h)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\big(v(x+h)\big)\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}(u(x+h))\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = v(x).u'(x)+u(x).v'(x)\blacksquare$$

7. Turunan untuk operasi pembagian

Jika $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ dengan $v(x) \neq 0$, maka

$f'(x) = \frac{u'(x).v(x)-u(x).v\prime(x)}{v^2(x)}$ atau

$$D_x\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{D_x\big(u(x)\big).v(x)-u(x).D_x(v(x))}{v^2(x)}$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)(v(x))}}{h} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)(v(x))} \right) \left(\frac{1}{h} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{h} \right) \left(\frac{1}{v(x+h)(v(x))} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h)v(x) - v(x)u(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{h} \right) \left(\frac{1}{v(x+h)(v(x))} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(v(x)m \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) \left(\frac{1}{v(x+h)(v(x))} \right)$$

$$f'(x) = (v(x)u'(x) - u(x)v'(x)) \ \frac{1}{v(x)v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{(v(x)u'(x) - u(x)v'(x))}{v^2(x)} \ \blacksquare$$

8. Turunan Fungsi Balikan

Jika $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ terdiferensialkan di x dan $u(x) \neq 0$, maka

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} \ \text{atau} \ D_x \left(\frac{1}{u(x)} \right) = -\frac{D_x(u(x))}{u^2(x)}$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\frac{1}{u(x+h)} - \frac{1}{u(x)}}{h} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\frac{u(x) - u(x+h)}{u(x+h).u(x)}}{h} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x)-u(x+h)}{u(x+h).u(x)} \right) \frac{1}{h}$$

$$f'(x) = -\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{u(x+h).u(x)} \right) \left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \right)$$

$$f'(x) = -\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{u(x+h).u(x)} \right) \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \right)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{u(x).u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{u^2(x)} \blacksquare$$

Contoh:

1) Dapatkan turunan dari fungsi berikut:

$$f(x) = \pi$$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan sifat (1) , maka $f'(x) = 0$

2) Dapatkan turunan dari fungsi berikut:

$$f(x) = x\sqrt{x} + 5$$

Penyelesaian:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

3) Dapatkan turunan dari fungsi berikut:

$$f(x) = 2x^{10} + 3x^7 - 2x + 5$$

Penyelesaian:

$$f'(x) = 20x^9 + 21x^6 - 2$$

4) Diketahui $h(x) = \frac{2x^2+1}{x-1}$, $x \neq 1$. Tentukan $h'(x)$.

Penyelesaian:

$$h'(x) = \frac{D_x(2x^2+1).(x-1) - (2x^2+1).D_x(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{4x\ (x-1) - (2x^2+1).1}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{4x^2 - 4x\ - 2x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x^2 - 4x\ - 1}{(x-1)^2} \blacksquare$$

5) Diketahui $T(x) = \frac{1}{x+3}$, $x \neq -3$. Tentukan $T'(x)$

Penyelesaian:

$$T'(x) = \frac{D_x(1).(x+3) - (1).D_x(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$T'(x) = \frac{(0).(x+3) - (1).(1)}{(x+3)^2}$$

$$T'(x) = \frac{-1}{(x+3)^2} \blacksquare$$

9. Aturan Rantai

Aturan rantai pada turunan suatu fungsi merupakan turunan yany dilakukan berturut turut pada suatu fungsi. Secara matematis dituliskan. Jika u adalah fungsi dalam x dan y diman u terdiferensialkan, sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Jika $y = f(u), u = g(v)$, dan $v = h(x)$, maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

Jika $y = f(u), u = g(x)$ menentukan fungsi komposisi $y = f\big(g(x)\big) = fog(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka fog terdiferensialkan di x dan $(fog)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$ adalah:

$$D_x y = D_u y. D_x u$$

Jika $y = f(u), u = g(x)\ dan\ v = h(x)$, maka:

$$D_x y = D_u y. D_v u. D_x v$$

Contoh:

1) Carilah $\frac{dy}{dx}, jika\ y = (3x^5 - 7x)^{12}$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 3x^5 - 7x$, maka $y = u^{12}$

Sehingga

$$\frac{du}{dx} = 15x^4 - 7$$

$$\frac{dy}{du} = 12u^{11}$$

Dengan demikian

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (12u^{11}).(15x^4 - 7)$$

$$\frac{dy}{dx} = 12(3x^5 - 7x)^{11}.(15x^4 - 7)$$

D. Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar

Ada beberapa bahasan tentang aplikasi fungsi aljabar

1. Garis Singgung dan garis normal

Jika titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada kurva $y = f(x)$, maka Persamaan garis singgung kurva yang melalui titik tersebut adalah

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Dengan m adalah gradien kemiringan garis, dimana

$m = f'(x) = y'$

Jika terdapat dua potongan garis yang mempunyai gradien masing masing m_1 dan m_2 maka kedua garis akan:

a. Saling sejajar, jika $m_1 = m_2$
b. Saling Tegak Lurus. Jika $m_1 . m_2 = -1$

Contoh:

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 3$ titik

(-1 , 2) dan (2 , 0).

Penyelesaian:

$$y = x^2 - 2x + 3$$

$$y' = 2x - 2$$

Untuk titik (-1,2) maka $m = -4$

Maka persamaan garis singgung kurva pada titik (-1,2) adalah:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 2 = -4\,(x + 1)$$

$$y + 4x + 2 = 0$$

Untuk titik (2,0) maka $m = 2$

Maka persamaan garis singgung kurva pada titik (2,0) adalah:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y = 2\ (x - 2)$$

$$y - 2x + 4 = 0$$

2. Kecepatan dan percepatan

Gerak suatu partikel sepanjang suatu garis lurus secara lengkap dinyatakan dalam persamaan $s = f(t), t \geq 0$, waktu, dan s jarak P dari suatu titik tetap tertentu 0 pada lintasannya.

Kecepatan (velocity) dari P pada waktu t adalah $v\ = \frac{ds}{dt}$

a. Jika $v > 0$ maka P bergerak searah dengan naiknya s
b. Jika $v < 0$ maka P bergerak searah turunannya s
c. Jika $v = 0$ maka P dalam keadaan berhenti.

Persepatan dari P pada waktu t adalah $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

a. Jika $a > 0$ maka $v\ \ naik$
b. Jika $a < 0$ maka v turun

Kelajuan bertambah jika v dan a bertanda sama dan berkurangbila berlainan tanda.

Contoh:

Sebuah partikel sepanhang garis koordinat mendatar sedemikian hingga posisi pada saat t dinyatakan oleh

$s =\ t^3 - 12t^2 + 36t - 30$. dengan s diukur dalam meter dan t dalam detik.

a. Kapan kecepatannya 0.
b. Kapan kecepatannya positif
c. Kapan percepatammya positif

Penyelesaian:

a. $v = \frac{dv}{ds}$

   $3\ t^2 - 24t + 36 = 0$

$3\ (t-2)(t-6)=0$

$(t-2)=0$ atau $(t-6)=0$

$t=2$ atau $t=6$

Jadi $v=0$, pada saat $t=2$ dan $t=6$

b. Kapan Kecepatan Positif:

$v>0$, jika saat $t<2$ atau saat $t>6$

c. Kapan Percepatannya positif:

$a=\frac{dv}{dt}=6t-24>0$, maka $t>4$

DAFTAR PUSTAKA

Adams, R. A., & Essex, C. (2017). *Calculus: A complete course* (9th ed.). Pearson. Library and Archives Canada Cataloguing in Publication.

Leithod, L. (1986). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik* (E. Hutahaean, Trans.). Erlangga.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Susila, N. (1995). *Kalkulus dan geometri analitis* (B. Kartasasmita & Rawuh, Trans.). Erlangga.

Trench, W. F. (2013). *Introduction to real analysis*. Pearson Education.

BAB 8
KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN

A. Pendahuluan

Dalam konteks Kalkulus, kemonotonan dan kecekungan merupakan konsep penting dalam analisis dan fungsi. Karena analisis kemonotonan maupun kecekungan melibatkan penentuan turunan pertama dari suatu fungsi yang diberikan.

Kemonotonan merupakan konsep dalam analisis fungsi yang menggambarkan kecenderungan naik atau turunnya suatu fungsi diinterval dan kriteria tertentu. Sedangkan kecekungan adalah kecenderungan bentuk grafik suatu fungsi yang menunjukkan perubahan fungsi dari cekung ke atas atau cekung ke bawah begitupula sebaliknya. Hubungn antara kemonotonan dan kecekungan dalam analisis fungsi sangaat penting, karena keduanya saling terkait dalam memahami sifat dan perilaku grafik suatu fungsi.

Kedua teorema tersebut memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, tetapi paling tepat digunakan dalam bidang ilmu matematika, ekonomi dan analisis bisnis. Teorema tersebut juga tak kalah pentingnya dalam berbagai bidang teknik, terutama dalam analisis dan desain sistem yang dapat menentukan performa sistem teknik karena mempengaruhi cara sistem bergerak dan berubah.

B. Teorema Kemonotonan

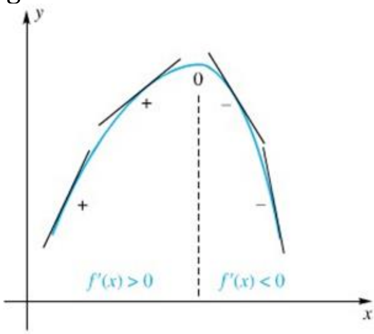
Teorema kemonotonan adalah suatu teorema dalam analisis diferensial. Teorema ini digunakan untuk menentukan apakah suatu fungsi monoton naik atau turun di interval tertentu.

1. Definisi Kemonotonan

a. Suatu fungsi fungsi *f(x)* dikatakan monoton naik di interval *U* jika untuk setiap pasang bilangan *x1* dn x2 di interval tersebut *f(x1) < f(x2)* dimana *x1 < x2*, *x1* dan *x2* ϵ *U*.
b. Suatu fungsi *f(x)* dikatakan monoton turun di interval *U* jika untuk setiap pasang bilangan *x1* dn x2 di interval *U*, *f(x1) > f(x2)* dimana *x1 > x2*, *x1* dan *x2* ϵ *U*.

Dalam menentukan selang fungsi *U* monoton naik atau turun, sederhananya sebagai gradien dari suatu garis didefinisikan sebagai tangen sudut φ yang dibentuk oleh garis tersebut dengan sumbu x positif menjadi m= tan φ, bila sudut lancip maka m > 0 dan jika tumpul m < 0 karena gradien garis singgung suatu kurva *y = f(x)* ditik (*x,y*) diberikan dengan *m = f'(x)* dan selang fungsi naik atau turun ditentukan oleh nilai gradiennya, yakni m > 0 maka disebut fungsi monoton naik dan m < 0 disebut fungsi monoton turun.

Indikasi kemonotonan juga dapat dijelaskan seperti pada gambar 8.1, dimana berdasarkan definisi di atas, maka dapat disederhanakan bahwa fungsi mengalami monoton naik jika nilai outputnya selalu meningkat, dimana garis singgung kurva berada pada sisi kiri grafik fungsi begitu pula sebaliknya monoton turun jika outputnya selalu menurun, yakni garis singgung kurva berada pada sisi kanan grafik fungsi.



Gambar 8. 1 Gambar Indikasi kemonotonan dengan mengacu pada turunan pertama dari fungsi $\boldsymbol{f(x)}$

2. Syarat Monotonitas

Berdasarkan teorema monotonis di atas, maka syarat monotonis harus memenuhi kriteria berikut:

1) Ditinjau dari bentuk grafik, terjadi kenaikan dan penurunan Grafik dari suatu fungsi:
   a. fungsi monoton naik memiliki grafik yang selalu meningkat dari kiri ke kanan.
   b. fungsi monoton turun memiliki grafik yang selalu menurun dari kanan ke kiri.
2) Ditinjau dari persamaannya dapat menentukan turunan pertama dari suatu fungsi.
   a. Jika turunan pertama positif yakni $m = f'(x) > 0$, pada interval U, maka fungsi $f(x)$ naik di interval tersebut.
   b. Jika turunan pertama negatif yakni $m = f'(x)$, pada interval U, maka fungsi $f'(x)$ turun di interval tersebut.

3. Aplikasi Kemonotonan

Merupakan penggunaan teorema kemonotonan dalam berbagai bidang untuk menentukan naik atau turunnya suatu fungsi dinterval tertentu.

a. Analisis minimum dan maksimum
   Digunakan untuk menentukan titik ekstrim (masksimum atau minimum) dari suatu fungsi. Titik ekstrim tercapai pada saat turunan pertama fungsi tersebut, $f'(x) = 0$.

   Untuk menetukan titik ekstrim (maksimum atau minimum) dari suatu fungsi. Titik ekstrim tercapai saat turunan pertama fungsi tersebut sama dengan nol.

   Jika terdapat fungsi $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9x + 1$,

   Maka $f'(x) = 4x^3 - 12x + 9$

   Titik ekstrim tercapai pada saat $f'(x) = 0$, yaitu saat nilai $x = -\frac{3}{2}\ dan\ x = \frac{3}{2}$

b. Analisis Elastisitas:
- Dalam bidang ekonomi, teorema kemonotonan digunakan untuk menganalisis elastisitas permintaan dan penawaran. Misalnya, jika fungsi biaya atau laba monoton naik, maka elastisitasnya dapat diidentifikasi.
- Dalam fisika dan teknik, teorema kemonotonan digunakan untuk menganalisis perilaku benda elastis ketika diberi gaya Tarik.
- Elastisitas dalam bidang teknik tenaga listrik merujuk pada kemampuan sistem listrik untuk menyesuaikan diri dengan perubahan kondisi operasional tanpa mengalami kerusakan signifika.

c. Analisis Grafik Fungsi:
Teorema kemonotonan digunakan untuk menentukan monotonitas suatu fungsi. Jika turunan pertama bernilai positif, maka fungsi naik; jika bernilai negatif, maka fungsi turun.

Jika terdapat fungs $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9x + 1$i,

Maka $f'(x) = 4x^3 - 12x + 9$

Fungsi $f(x)$ naik pada interval $(1, \infty)$ dan turun pada interval $(-\infty, 1)$.

4. Contoh

1) Suatu fungsi Cosinus $f(x) = \cos x$, pada interval { 0°, 360°}. Tentukan kemonotonan fungsi naik dan turun.

Analisis Kemonotonan:

a). Turunan Pertama:

$f'(x) = -\sin x$

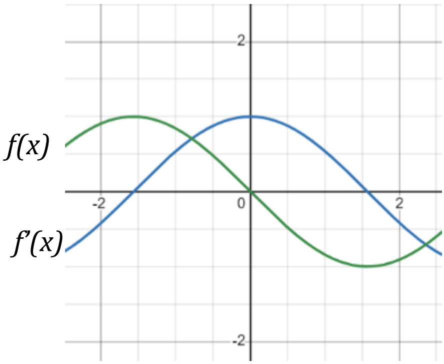
b). Titik Nol Turunan:

Untuk menetukan interval fungsi naik dan turun, cari titik-titik nol turunan, yaitu ketika $f'(x) = 0$, yakni $-\sin x = 0$ dan ini hanya dapat terjadi pada

$$x = 0^o, 180^0\ dan\ 360^o$$

c). Uji Nilai Turunan:

- Pada interval $0^o, 180^0$, nilai $-\sin x = positif$, sehingga $f'(x) > 0$ dan fungsi naik.
- Pada interval $180^o, 360^0$, nilai $-\sin x = negatif$, sehingga $f'(x) < 0$ dan fungsi turun.



Gambar 8. 2 Illustrasi grafik soal no.1, fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dan turunannya $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})$

2) Contoh untuk fungsi yang lain :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

Analisis Kemonotonan:

a). Turunan Pertama:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

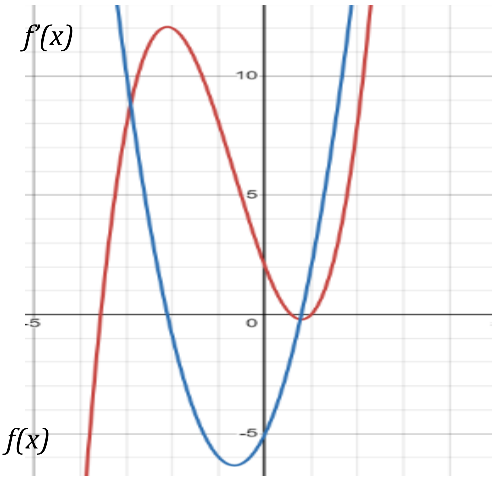
b). Titik Nilai Turunan:

Untuk menetukan interval fungsi naik dan turun, cari titik-titik nol turunan, yaitu ketika $f'(x) = 0$, yakni $3x^2 + 2x - 5 = 0$ dan ini hanya dapat terjadi pada

$$x = -1 \; dan \; \frac{5}{3}$$

c). Uji Nilai Turunan:

- Pada interval $-\infty, -1$, nilai $f'(x) < 0$, dan fungsi turun.
- Pada interval $-1, \frac{5}{3}$, nilai $f'(x) > 0$ dan fungsi naik
- Pada interval $\frac{5}{3}, \infty$, nilai $f'(x) < 0$, dan fungsi turun.



Gambar 8. 3 Illustrasi grafik soal no.2, fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dan turunannya $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$

3) Contoh fungsi kosinus yang lain
   $f(x) = 3\cos\ (3x - 15) + 5,$ pada interval {0°, 360°}
   Analisis Kemonotonan:

   a). Turunan Pertama:

   $$f'(x) = -9\sin(3x - 15)$$

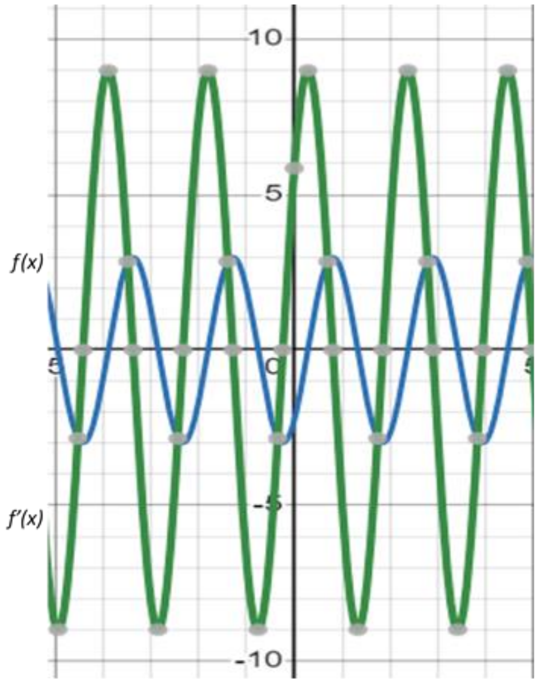
b). Titik Nol Turunan:

Untuk menetukan interval fungsi naik dan turun, cari titik-titik nol turunan, yaitu ketika $f'(x) = 0$, yakni $-9\sin(3x - 15) = 0$ dan ini hanya dapat terjadi pada

$$x = 5^o, 65^0, 125^o, 185^0, 245^o, dan\ 305^o$$

c). Uji Nilai Turunan:

- Pada interval $0^o, 5^0$, nilai $-9\sin(3x-15) = positif$, sehingga $f'(x) > 0$ dan fungsi naik.
- Pada interval $5^o, 65^0$, nilai $-9\ \sin(3x-15) = negatif$, sehingga $f'(x) < 0$ dan fungsi turun.
- Pada interval $65^o, 125^0$, nilai $-9\sin(3x-15) = positif$, sehingga $f'(x) > 0$ dan fungsi naik.
- Pada interval $125^o, 185^0$, nilai $-9\ \sin(3x-15) = negatif$, sehingga $f'(x) < 0$ dan fungsi turun.
- Pada interval $185^o, 245^0$, nilai $-9\sin(3x-15) = positif$, sehingga $f'(x) > 0$ dan fungsi naik.
- Pada interval $245^o, 305^0$, nilai $-9\ \sin(3x-15) = negatif$, sehingga $f'(x) < 0$ dan fungsi turun.
- Pada interval $305^o, 360^0$, nilai $-9\sin(3x-15) = positif$, sehingga $f'(x) > 0$ dan fungsi naik.



Gambar 8. 4 Illustrasi grafik soal no.3, fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dan turunannya $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$

C. Teorema Kecekungan

Kecekungan merupakan suatu konteks kalkulus yang digunakan untuk menggambarkan bagaimana suatu fungsi berubah secara grafis. Karakteristik suatu fungsi yang naik atau turun dapat digunakan untuk mendeskripsikan grafik fungsi tersebut. Selain itu, apabila ddiketahui letak selang yang membuat turunan pertama naik atau turun maka dapat ditentukan letak grafik fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ yang akan cekung ke atas atau cekung ke bawah.

1. Defenisi Kecekungan

Kecekungan suatu fungsi *f(x)* dapat didefenisikan melalui turunan pertama dan kedua.

a. Fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dikatakan cekung ke atas pada suatu interval *U* jika turunan pertamanya $\boldsymbol{f}‘(\boldsymbol{x})$ cenderung meningkat pada interval tersebut.

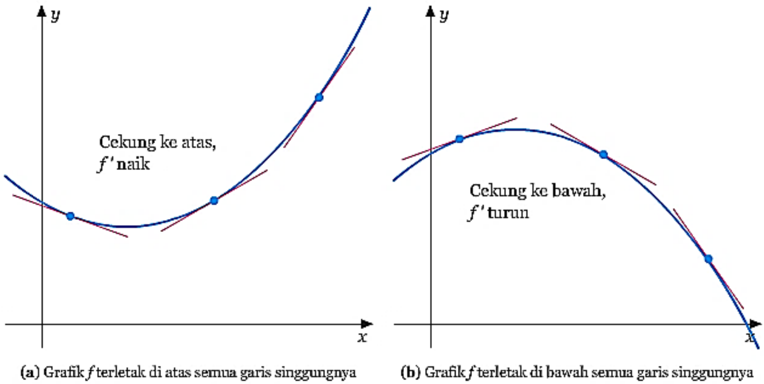
b. Sebaliknya, jika $\boldsymbol{f}\,‘(\boldsymbol{x})$ cenderung menurun, maka fungsi $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$ dikatakan cekung ke baawah pada interval *U*.

2. Syarat Kecekungan

Interpretasi grafik kecekungan dari suatu fungsi Grafik (Gambar 8.4) menjadi syarat kecekungan sebagai berikut:

a. Cekung ke atas; Jika $\boldsymbol{f}”(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}$ untuk semua *x* dalam interval *U*. Hal ini berarti bahawa grafik $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ berada di atas semua garis singgungnya pada interval tersebut (Gambar 8.5 a)

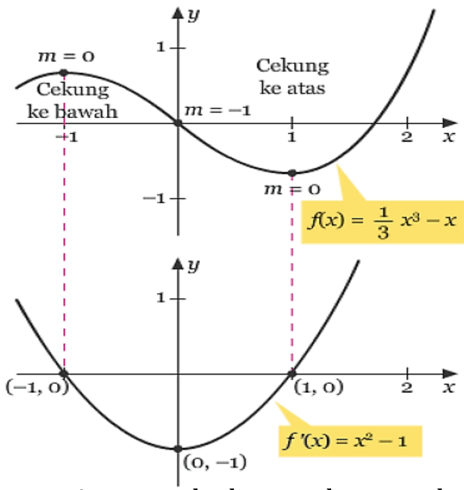
b. Grafik cekung ke bawah; jia $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{0}$ untuk semua *x* dalam interval *U*. Hal ini berarti bahawa grafik $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ berada di bawah semua garis singgungnya pada interval tersebut. (Gambar 8.5 b)



Gambar 8. 5 a. Interpretasi grafik kecekungan ke atas; b.Interpretasi grafik kecekungan ke bawah

3. Aplikasi Kecekungan

Teorema uji kecekungan menunjukkan bagaimana penggunaan turunan kedua suatu fungsi untuk menentukan selang di mana grafik $f(x)$ tersebut cekung ke atas atau cekung ke bawah. Perhatikan implementasi teori tersebut pada berikut:



Gambar 8. 6 Implementasi turunan kedua untuk menetukan interval dari cekung ke atas atau ke bawah.

4. Contoh

1) Suatu fungsi $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2}$

   Analisis Kecekungan :

   a) Turunan Pertama:

   $$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 12x + 9}$$

   b) Turunan Kedua:

   $$\boldsymbol{f''(x) = 6x - 12}$$

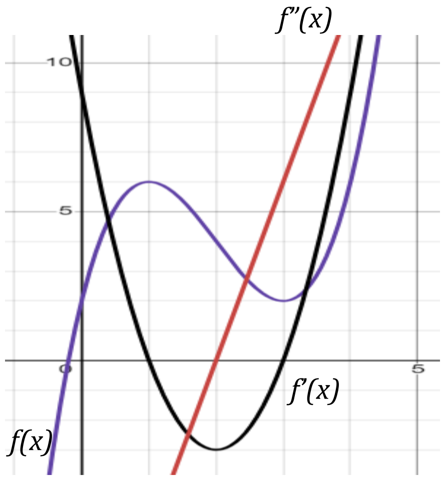
   c) Titik Nol Turunan Kedua:
   Untuk menetukan titik-titik belok, cari titik-titik nol turunan kedua, yaitu ketika $\boldsymbol{6x - 12 = 0}$, ini hanya terjadi pada $\boldsymbol{x = 2}$

   d) Uji Tanda Turunan Kedua:
   - Pada interval $(\infty, \boldsymbol{2})$, nilai $\boldsymbol{f"(x) < 0}$, grafik cekung ke bawah
   - Pada interval $(\boldsymbol{2}, \infty)$, nilai $\boldsymbol{f"(x) > 0}$, grafik cekung ke atas

D. Hubungan Antara Kemonotonan dan Kecekungan

Kemonotonan adalah sifat suatu fungsi yang menunjukkan bagaimana grafik berubah bentuk. Sedangkan kecekungan adalah karakter suatu fungsi yang menunjukkan bentuk grafiknya. Hubungan antaran kemonotoan dan Kecekungan sebagai berikut :

1) Turunan Pertama terhadap Kemonotonan; turunan pertama digunakan untuk menetukan kemonotonan suatu fungsi.
2) Turunan Kedua terhadap Kecekungan; turunan kedua untuk menentukan kecekungan suaut fungsi.
3) Analsisis Gafik; kemonotonan dan kecekungan digunakan bersamaan untuk mendeskripsikan bentuk grafik suatu fungsi secara lengkap.



Gambar 8. 7 Illustrasi grafik soal no.1, fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dan turunannya $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$, dan $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})$

Tabel 8. 1 Hasil analisis kecekungan

Interval	Nilai uji	Turunan kedua	Hasil
$(\infty, \mathbf{2})$	$x = -1$	$f''(x) < 0$	Cekung ke bawah
$(\mathbf{2}, \infty)$	$x = 3$	$f''(x) > 0$	Cekung ke atas

DAFTAR PUSTAKA

Desmos. (n.d.). *Calculator*. https://www.desmos.com/calculator (Diakses pada: 9 September 2024).

Kecekungan fungsi. (n.d.). *Bing*. https://www.bing.com/search?pglt=171&q=kecekungan+fungsi&cvid=ef6bfc12f76c426782912ef88fad89ce&gs_lcrp=EgZjaHJvbWUqBggBEAAYQDIGCAAQRRg5MgYIARAAGEAyBggCEAAYQDIGCAMQABhAMgYIBBAAGEAyBggFEAAYQNIBCDQ3OTRqMGoxqAIBsAIB&FORM=ANNTA1&PC=U531 (Diakses pada: 9 September 2024).

Kemonotonan fungsi. (n.d.). *Rahmateduc*. https://www.rahmateduc.com/2019/04/kemonotonan-fungsi_24.html (Diakses pada: 9 September 2024).

[YouTube Video]. (n.d.). https://youtu.be/5JwWyRe3zu0 (Diakses pada: 9 September 2024).

[YouTube Video]. (n.d.). https://youtu.be/Rd8C-sUKXUM (Diakses pada: 9 September 2024).

BAB 9
APLIKASI TURUNAN

A. Pendahuluan

Pada bab ini kita akan membahas aplikasi atau penerapan turunan dalam berbagai bidang seperti halnya bidang sains, teknik atau rekayasa, dan penerapan dibidang lainnya. Secara garis besar, suatu persamaan diferensial yang mengandung turunan-turunan dari suatu fungsi yang biasanya kita namakan fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, akan kita tentukan dari persamaan tersebut (Kreyszig, 1988). Konsep teoritis aplikasi atau penerapan turunan pada berbagai bidang melibatkan pemahaman yang mendalam tentang bagaimana turunan dapat menggambarkan suatu laju perubahan terhadap variable yang akan diamati, dan bagaimana konsep ini dapat digunakan dalam berbagai konteks teoritis utama.

B. Penerapan Turunan

Aplikasi turunan pada bidang kalkulus (dasar) memiliki berbagai penerapan yang sangat luas di berbagai bidang ilmu sains, teknik (rekayasa) maupun penerapan-penerapan dibidang lainnya, diantaranya:

1. Turunan dapat diaplikasikan untuk menentukan titik stationer serta nilai maksimum dan minimum dari kurva: (Stroud & Booth, 2003)

Dari kurva turunan pertama, akan kita peroleh titik stationer: $\frac{dy}{dx} = 0$
Untuk kurva turunan kedua, kita akan lihat bahwa:

- $\frac{d^2y}{dx^2} < 0\ (negatif)$ untuk y maksimum
- $\frac{d^2y}{dx^2} > 0\ (positif)$ untuk y minimum
- $\frac{d^2y}{dx^2} = 0\ (nol)$ untuk titik belok

Contoh soal:

Carilah titik stationer pada grafik fungsi $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$. Tentukanlah jenis titik-titik dari grafik fungsi ini dan sketsa grafik fungsinya.

Penyelesaian:

- Titik stationer diperoleh dengan menurunkan grafik fungsi kurva y = 0

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4\right)$$

  $$\frac{dy}{dx} = x^2 + x - 6$$

  $$x^2 + x - 6 = 0$$

  Untuk mencari nilai x dapat kita lakukan dengan cara pemfaktoran sebagai berikut:

  $(x - 2)(x + 3) = 0$
  $x_1 = 2$ dan $x_2 = -3$

- Mencari nilai y maksimum/minimum dapat kita lakukan dengan melihat hasil dari turunan kedua:

  $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(x^2 + x - 6)$$

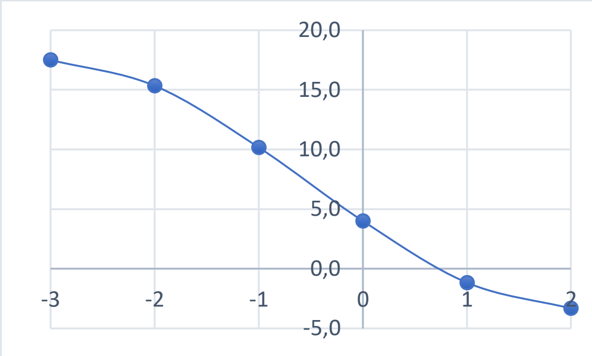
  $$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 1$$

  Subtitusikan nila x = 2 dan x = -3, akan diperoleh:

  $\frac{d^2y}{dx^2}(2) = 2(2) + 1 = 5$, nilai y minimum karena $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

  $\frac{d^2y}{dx^2}(-3) = 2(-3) + 1 = -5$, nilai y maksimum karena $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

- Gambar sketsa grafik fungsi



Gambar 9. 1 Grafik fungsi contoh soal 1

2. Turunan dapat diaplikasikan untuk menghitung kecepatan dan percepatan suatu partikel (P) sepanjang suatu garis lurus secara lengkap dinyatakan oleh persamaan $s(t) = f(t)$ dengan $t \geq 0$, dimana turunan pertama dari fungsi posisi merupakan kecepatan (v) dan percepatan (a) merupakan turunan kedua dari fungsi posisi. (Yahya, H.S, & S, 2014)

Jika:

a. $v > 0$, P bergerak searah dengan naiknya s
b. $v < 0$, P bergerak searah turunnya s
c. $v = 0$, P dalam keadaan diam.
d. Jika $a > 0$, v naik, dan jika $a < 0$, v turun

Contoh Soal:

Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus dengan persamaan posisi $s(t) = 2t^3 - t^2 + 3t$, dimana s merupakan jarak dalam satuan meter dan t merupakan waktu dalam satuan detik. Tentukan kecepatan dan percepatan benda tersebut pada t = 5 detik.

Penyelesaian:

$$v(t) = \frac{d}{dt}(2t^3 - t^2 + 3t)$$

$$v(t) = 2 \times 3 \times t^{3-1} - 2 \times t^{2-1} + 3 \times t^{1-1}$$

$$v(t) = 6t^2 - 2t + 3$$

Maka kecepatan pada saat t = 5 detik

$$v(5) = 6(5)^2 - 2(5) + 3 = 143\, m/s$$

Untuk mencari percepatan, maka kita akan menurunkan hasil dari kecepatan terhadap waktu (t) sebagai berikut:

$$a(t) = \frac{d}{dt}(6t^2 - 2t + 3)$$

$$a(t) = 2 \times 6t^{2-1} - 1 \times 2t^{1-1}$$

$$a(t) = 12t - 2$$

Maka percepatan pada t = 5 detik

$$a(5) = 12(5) - 2 = 58\, m/s^2$$

3. Turunan dapat diaplikasikan dalam bidang bisnis dan manajemen, untuk mengoptimalkan fungsi biaya: $TC = FC + VC = f(Q)$, dimana rumus biaya marginal (marginal cost-MC): $MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$. Dengan menggunakan turunan $MC = \frac{dTC}{dQ} = TC'$
   a. TC min syaratnya (TC' > 0, TC' = 0 atau MC' = 0)
   b. MC min syaratnya (MC">0, MC'= 0, atau TC'=0) (Sarjono & Sanny, 2012)

Contoh soal:

Biaya total (total cost-TC) yang dikeluarkan oleh sebuah industri petrokimia mengikuti persamaan $TC(Q) = Q^3 - 3Q^2 - 9Q + 1200$. Tentukanlah:

a. Fungsi MC
b. Tingkat produksi ketika TC min

c. Besar TC min tersebut

Penyelesaian:

a. Fungsi MC

$MC = TC'$

$TC' = \frac{d}{dQ}(Q^3 - 3Q^2 - 9Q + 1200)$

$TC' = 3Q^{3-1} - 2 \times 3Q^{2-1} - 1 \times 9Q^{1-1}$

$TC' = 3Q^2 - 6Q - 9$

b. Tingkat produksi ketika TC min,

Syarat TC min adalah TC' = 0 dan TC">0

$3Q^2 - 6Q - 9 = 0$

$Q^2 - 2Q - 3 = 0$

Untuk menyelesaikan bentuk persamaan kuadrat diatas kita dapat lakukan sebagai berikut:

Faktorkan:

$(Q - 3)(Q + 1) = 0$

Q = 3 dan Q = -1

atau

Rumus abc:

a$Q^2 + bQ + c = 0$

$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$Q = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$

$Q = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$

Q = 3 dan Q = -1

$$TC" = \frac{d}{dQ}(3Q^2 - 6Q - 9)$$

$TC" = 6Q - 6$

$TC"(3) = 6(3) - 6 = 12$, karena nilai $TC"(3) > 0$ (memenuhi syarat)

$TC"(-1) = 6(-1) - 6 = -12$, karena nilai $TC"(-1) < 0$ fungsi maksimum (tidak memenuhi syarat)

Jadi, TC min terjadi pada tingkat produksi sebesar 3 unit

c. Besar TC min tersebut

$TC(Q) = Q^3 - 3Q^2 - 9Q + 1200$

$TC_{min}(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 1200$

$TC_{min}(3) = 27 - 27 - 27 + 1200$

$TC_{min}(3) = 1173$

4. Turunan dapat digunakan untuk menggambarkan laju perubahan dari suatu fungsi seperti untuk mempelajari laju pertumbuhan populasi suatu spesies.

Contoh soal:

Populasi suatu spesies tumbuh sesuai dengan model fungsi $P(t) = 100e^{0,5t}$, di mana $P(t)$ adalah populasi pada t tahun. Tentukan laju pertumbuhan populasi pada saat t = 10 tahun dan tentukan kapan populasi mencapai 1000.

Penyelesaian:

$$P'(t) = \frac{d}{dt}(100e^{0,5t})$$

$P'(t) = 50e^{0,5t}$

Untuk menentukan laju pertumbuhan populasi pada t = 10 tahun, maka subtitusikan t = 10 tahun ke fungsi P'(t), diperoleh:

$P'(10) = 50e^{0,5(10)} = 7420,66$ individu per tahun

Untuk menentukan waktu saat populasi mencapai P(t) = 1000

$$1000 = 100e^{0,5t}$$

$$10 = e^{0,5t}$$

$$ln(10) = 0,5t$$

$$t = {ln(10)}/_{0,5} = 4,6 \text{ tahun}$$

5. Turunan dapat digunakan untuk mempelajari kecepatan maksimum atau minimum suatu aliran fluida dan laju perubahan kecepatan aliran fluida yang terjadi di dalam pipa.

Contoh Soal:

Kecepatan aliran suatu fluida di dalam pipa dinyatakan dengan persamaan $v(r) = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ dimana r adalah jarak dari sumbu pipa, dan R adalah radius pipa. Tentukan kecepatan maksimum dan laju perubahan kecepatan terhadap r pada jarak $r = \frac{R}{4}$

Penyelesaian:

Kecepatan maksimum terjadi ketika $v'(r) = 0$

$$v'(r) = \frac{d}{dr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$2\frac{r}{R^2} = 0$ → r = 0

Kecepatan maksimum terjadi pada r = 0

$$v(0) = \left(1 - \frac{0^2}{R^2}\right) = 1$$

Maka laju perubahan kecepatan terhadap *r* pada $r = \frac{R}{4}$:

$$v'(r) = 2\frac{r}{R^2}$$

$$v'\left(\frac{R}{4}\right) = 2\frac{\left(\frac{R}{4}\right)}{R^2} = \frac{1}{2R}$$

6. Turunan dapat digunakan untuk menentukan arus listrik pada sebuah rangkaian RLC seri. (Kreyszig, 1988)

Contoh soal:

Pada sebuah rangkaian RLC seri, tegangan $V(t)$ diberikan oleh $V(t) = 50e^{-0,1t}sin(\pi t)$. Tentukan arus $I(t)$ jika $I(t)$ adalah turunan dari tegangan terhadap waktu

Penyelesaian:

$$I(t) = \frac{d}{dt}\left(50e^{-0,1t}sin(\pi t)\right)$$

Karena bentuk turunan diatas merupakan bentuk perkalian maka dapat kita selesaikan dengan cara turunan berantai:

$$I(t) = sin(\pi t)\frac{d}{dt}(50e^{-0,1t}) + 50e^{-0,1t}\frac{d}{dt}\left(sin(\pi t)\right)$$

$$I(t) = sin(\pi t)(-5e^{-0,1t}) + 50e^{-0,1t}\left(\pi cos(\pi t)\right)$$

$$I(t) = 50e^{-0,1t}\left(-0,1sin(\pi t) + \pi cos(\pi t)\right)$$

7. Turunan dapat digunakan untuk menghitung perubahan laju reaksi kimia yang bergantung terhadap konsentrasi yang terjadi pada reaktor gelembung pancaran.

Contoh soal:

Dalam reaksi kimia tertentu, laju reaksi r (dalam satuan mol per liter detik) tergantung terhadap konsentrasi C (dalam satuan mol per liter) menurut persamaan $r = kC^n$, di mana k adalah konstanta laju reaksi dan n adalah orde reaksi (Levenspiel, 1999). Apabila diketahui bahwa k = 0,05 dan n = 3.

a. Tentukan laju perubahan laju reaksi terhadap waktu jika konsentrasi berubah menurut $C(t) = 10 - 0,1t$, dimana t adalah waktu dalam satuan detik.

b. Hitung laju perubahan laju reaksi pada t = 60 detik

Penyelesaian:

Subtitusikan C(t) ke persamaan r dan nilai k serta n, maka akan diperoleh:

$$r = 0{,}05(10 - 0{,}1t)^3$$

Untuk menentukan $\frac{dr}{dt}$ dapat kita gunakan aturan rantai sebagai berikut:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}05(10 - 0{,}1t)^3)$$

$$\frac{dr}{dt} = 3 \times 0{,}05 \times (10 - 0{,}1t)^{3-1}(-0{,}1)$$

$$\frac{dr}{dt} = -0{,}015(10 - 0{,}1t)^2$$

Maka laju perubahan reaksi pada t = 60 detik:

$$\frac{dr}{dt} = -0{,}015(10 - 0{,}1 \times 60)^2 = -024$$

8. Turunan dapat digunakan untuk menyelesaikan fenomena kedalaman penetrasi gelembung yang terjadi di dalam kolom gelembung pancaran terhadap kecepatan cairan yang keluar dari *nozzle* (Nugroho, Adisalamun, & Machdar, 2014), dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial yang melibatkan turunan suatu fungsi.

Contoh soal:

Kedalaman penetrasi gelembung Z (dalam satuan meter) yang terjadi di dalam kolom gelembung pancaran terhadap kecepatan cairan v (dalam satuan liter per menit) keluar *nozzle* dapat dijabarakan dalam suatu persamaan:

$$Z(v) = 9{,}02 \times 10^{-2{,}2067+1{,}2347log(3{,}4v)-0{,}3834(log3{,}4v)^2}$$

Tetukan laju perubahan kedalaman penetrasi gelembung maksimum (Z_{max}) terhadap kecepatan cairan, dan berapa kedalam penetrasi gelembung pada saat kecepatan cairan (v) = 15 liter/menit

Penyelesaian:

Menentukan laju perubahan kedalaman penetrasi gelembung maksimum terhadap kecepatan cairan, maka $\frac{dZ(v)}{dv} = 0$

$$Z(v) = 9{,}02 \times 10^{-2{,}2067+1{,}2347log(3{,}4v)-0{,}3834(log3{,}4v)^2}$$

$$ln\{Z(v)\} = ln9{,}02 + ln10^{-2{,}2067+1{,}2347log(3{,}4v)-0{,}3834(log3{,}4v)^2}$$

$$ln\{Z(v)\} = ln9{,}02 + \{-2{,}2067 + 1{,}2347log(3{,}4v) - 0{,}3834(log3{,}4v)^2\}ln10$$

$$\frac{1}{Z(v)}\frac{dZ(v)}{dv} = \left\{\frac{1{,}2347}{vln10} - \frac{0{,}7668log3{,}4v}{vln10}\right\} ln10$$

$$\frac{dZ(v)}{dv} = Z(v)\left\{\frac{1{,}2347-0{,}7668log3{,}4v}{v}\right\}$$

$$0 = 9{,}02 \times 10^{-2{,}2067+1{,}2347log(3{,}4v)-0{,}3834(log3{,}4v)^2}\left\{\frac{1{,}2347-0{,}7668log3{,}4v}{v}\right\}$$

$$1{,}2347 = 0{,}7668log3{,}4v$$

v = 11,9 liter/menit

Kedalaman penetrasi gelembung pada saat v = 15 liter/menit

$$Z(15) = 9{,}02 \times 10^{-2{,}2067+1{,}2347log(3{,}4\times15)-0{,}3834(log3{,}4\times15)^2}$$

$$Z(15) = 0{,}55 \text{ dm}$$

9. Turunan dapat digunakan untuk menghitung perubahan konsentrasi penyisihan amonia dengan menggunakan udara *stripping* pada kolom gelembung pancaran. (Nugroho, 2017)

Contoh soal:

Hasil penelitian terhadap perubahan konsentrasi penyisihan amonia (dalam satuan ppm) yang terkandung didalam limbah cair terhadap waktu (dalam satuan jam) dapat dinyatakan dalam persamaan $C(t) = 266{,}84e^{-0{,}621t}$. Hitunglah laju perubahan konsentrasi penyisihan amonia pada saat t = 10 jam dan berapa waktu yang dibutuhkan untuk menyisihkan kadar amonia mencapai 10 ppm?

Penyelesaian:

a. Laju perubahan konsentrasi penyisihan amonia

$$C'(t) = \frac{dC}{dt}(266{,}84e^{-0{,}621t}) = -165{,}7e^{-0{,}621t}$$

Maka perubahan konsentrasi penyisihan amonia pada saat t = 10 jam

$C'(3) = -165{,}7e^{-0{,}621(10)} = -0{,}333$ ppm per jam.

b. Waktu yang dibutuhkan untuk menyisihkan kadar amonia mencapai C(t) = 10 ppm

$$10 = 266{,}84e^{-0{,}621t}$$

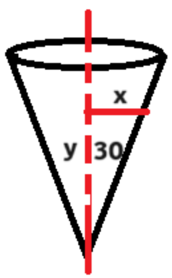
$$t = \frac{ln\left({}^{10}/_{266{,}8}\right)}{-0{,}621} = 5{,}3 \text{ jam}$$

10. Turunan dapat diaplikasikan untuk menghitung kecepatan cairan yang keluar dari suatu bejana yang berbentuk kerucut terbalik. (Sastry, 2008)

Contoh soal:

Sebuah bejana berbentuk kerucut terbalik dengan sudut semivertikal 30o. Air dituangkan ke dalam bejana ini dengan laju $\frac{dV}{dt} = 150$ cc per detik. Hitunglah laju kenaikan permukaan air ketika kedalamannya 5 cm.

Solusi:



Volume kerucut :

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi x^2 y}$$

$$tan(30^o) = \frac{x}{y} \rightarrow x = {}^1/_{\sqrt{3}}\, y$$

Ketika $x = {}^1/_{\sqrt{3}}\, y$, maka:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left({}^1/_{\sqrt{3}}\, y\right)^2 y$$

$$V = \frac{1}{9}\pi y^{3}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9}\pi(3y^{2})\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi y^{2}\frac{dy}{dt}$$

Diketahui $\frac{dV}{dt} = 150$ cc/detik ketika y = 5 cm maka akan diperoleh laju kenaikan permukaan air, sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{{}^{dV}/_{dt}}{\frac{1}{3}\pi y^{2}} = \frac{150}{\frac{1}{3}\pi(5)^{2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{18}{\pi}\ \text{cm/detik}$$

Hal ini berarti permukaan air naik dengan kecepatan $\frac{18}{\pi}$ cm/detik ketika kedalaman air 5 cm.

Soal Latihan:

1. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus dengan persamaan posisi $s(t) = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 4t$, dimana s merupakan jarak dalam satuan meter dan t merupakan waktu dalam satuan detik. Tentukan kecepatan (v) dan percepatan benda (a) tersebut pada t = 2 detik.

2. Sebuah industri farmasi ingin memproduksi suatu barang dengan biaya minimum. Biaya produksi C (dalam jutaan rupiah) sebagai suatu fungsi dari jumlah barang yang harus diproduksi x adalah $C(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ untuk meminimalkan biaya produksi.

3. Populasi suatu spesies tumbuh sesuai dengan model fungsi $P(t) = 100e^{0,1t}$, di mana $P(t)$ adalah populasi pada t tahun. Tentukan laju pertumbuhan populasi pada saat t = 5 tahun dan tentukan kapan populasi mencapai 500.

4. Kecepatan aliran suatu fluida di dalam pipa dinyatakan dengan persamaan $v(r) = \left(9 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ dimana r adalah jarak dari sumbu

pipa, dan R adalah radius pipa. Tentukan kecepatan maksimum dan laju perubahan kecepatan terhadap r pada jarak $r = \frac{R}{9}$.

5. Dalam sebuah rangkaian RLC seri, tegangan $V(t)$ diberikan oleh $V(t) = 25e^{-0,5t} sin(2\pi t)$. Tentukan arus $I(t)$ jika $I(t)$ adalah turunan dari tegangan terhadap waktu.

6. Dalam reaksi kimia tertentu, laju reaksi r (dalam satuan mol per liter detik) tergantung terhadap konsentrasi C (dalam satuan mol per liter) menurut persamaan $r = kC^n$, di mana k adalah konstanta laju reaksi dan n adalah orde reaksi. Apabila diketahui bahwa k = 0,1 dan n = 2.

a. Tentukan laju perubahan laju reaksi terhadap waktu jika konsentrasi berubah menurut $C(t) = 5 - 0,5t$, dimana t adalah waktu dalam detik.

b. Hitung laju perubahan laju reaksi pada t = 30 detik

7. Hasil penelitian terhadap perubahan konsentrasi penyisihan amonia (dalam satuan ppm) yang terkandung didalam limbah cair terhadap waktu (dalam satuan jam) dapat dinyatakan dalam persamaan $C(t) = 185,42e^{-0,338t}$. Hitunglah laju perubahan konsentrasi penyisihan amonia pada saat t = 5 jam dan berapa waktu yang dibutuhkan untuk menyisihkan kadar amonia mencapai 5 ppm?

8. Sebuah bejana berbentuk kerucut terbalik dengan sudut semivertikal 60^o. Air dituangkan ke dalam bejana ini dengan laju 12 liter per menit. Hitunglah laju kenaikan permukaan air ketika kedalamannya 2 dm.

Solusi Soal Latihan:

1. Kecepatan pada t = 2 detik

   $v(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 6(2) - 4 = 16\ m/s$

   Percepatan pada t = 2 detik

   $a(2) = 12(2)^2 - 12(2) + 6 = 30\ m/s^2$

2. $C'(t) = 3x^2 - 6x + 3$

   $x^2 - 2x + 1 = 0$

   x = 1

   $C"(1) = 6(1) - 6 = 0$

3. Laju pertumbuhan populasi pada t = 5 tahun

   $P'(5) = 10e^{0,1(5)} = 16,5$ individu per tahun

   Waktu popolasi pada P(t) = 500

   $t = {}^{ln\left({}^{500}/_{100}\right)}/_{0,1} = 16,1$ tahun

4. Kecepatan maksimum terjadi pada r = 0

   $v(0) = \left(9 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 9$

   Maka laju perubahan kecepatan terhadap r pada $r = \frac{R}{9}$:

   $v'\left(\frac{R}{9}\right) = 2\left(\frac{{}^{R}/_{9}}{R^2}\right) = \frac{2}{9R}$

5. $I(t) = 25e^{-0,5t}\{-0,5t sin(2\pi t) + 2\pi cos(2\pi t)\}$

6. a. Laju perubahan laju reaksi terhadap t

   $\frac{dr}{dt} = 0,05t - 0,5$

b. Laju perubahan laju reaktu pada t = 30 detik

   $\frac{dr}{dt} = 0,05(30) - 0,5 = 1$

7. Laju perubahan konsentrasi penyisihan amonia pada t = 5 jam

   $C'(5) = -62,672e^{-0,338(5)} = -11,56$ ppm/jam

   Waktu yang dibutuhkan untuk menyisihkan kadar amonia mencapai C(t) = 5 ppm

$t = \frac{ln\left({}^{5}/_{185,42}\right)}{-0,338} = 10,7$ jam

8. $V = \pi y^{\,3}$

$\frac{dV}{dt} = 3\pi y^{\,2}\frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{12}{3\pi(2)^2} = \frac{1}{\pi}$ dm/menit

DAFTAR PUSTAKA

Kreyszig, E. (1988). *Advanced Engineering Mathematics, Six Edition.* New Jersey: John Willey & Sons, Inch.

Levenspiel, O. (1999). *Chemical Reaction Engineering, Third Edition.* New York: John Wiley & Sons.

Nugroho, D. H. (2017). Pengaruh Diameter Nozzle, Temperatur, dan pH Terhadap Penyisihan Kadar Amonia Dengan Menggunakan Udara Stripping Pada Kolom Gelembung Pancaran. *Jurnal Hasil Penelitian Industri, Vol.6, No.1*, 59-64.

Nugroho, D. H., Adisalamun, & Machdar, I. (2014). Pengaruh Nozzle Terhadap Hidrodinamika Kolom Gelembung Pancaran. *Jurnal Rekayasa Kimia dan Lingkungan*, 84-91.

Sarjono, H., & Sanny, L. (2012). *Aplikasi Matematika Untuk Bisnis dan Manajemen.* Jakarta: Penerbit Salemba Empat.

Sastry, S. (2008). *Engineering Mathematics, Volume One, Fourth Edition.* New Delhi: PHI Learning Private Limited.

Stroud, K., & Booth, D. J. (2003). *Matematika Teknik, Edisi Kelima, Jilid I.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Wijaya, Y. P. (2024). Penerapan Kalkulus Diferensial dalam Analisis Kecepatan dan Percepatan pada Gerak Benda. *Jurnal Dunia Ilmu*.

Yahya, Y., Suryadi, D. H. S., & Agus, S. (2014). *Matematika Dasar Perguruan Tinggi.* Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia.

BAB 10
INTEGRAL

A. Pengantar Konsep Integral

1. Archimedes dan Konsep Integral

Archimedes (287 SM–212 SM) adalah seorang matematikawan dan ilmuwan Yunani yang dikenal sebagai salah satu pionir dalam pengembangan konsep integral. Ia lahir di Sirakusa, Sisilia, dan banyak informasi tentang kehidupannya berasal dari biografer Romawi, Plutarch. Archimedes diakui sebagai salah satu matematikawan terbesar sepanjang masa, dan kontribusinya dalam bidang matematika sangat memengaruhi perkembangan kalkulus integral.

Salah satu pencapaian terbesar Archimedes adalah pengembangan *Methode of Exhaustion*, sebuah teknik yang digunakan untuk menghitung luas dan volume. Metode ini sangat mendekati prinsip-prinsip kalkulus integral modern, di mana luas di bawah kurva dan volume benda dapat dihitung dengan membagi bentuk tersebut menjadi bagian-bagian kecil dan menjumlahkan hasilnya. Dalam karya-karyanya, Archimedes menggunakan metode kehabisan untuk menemukan luas area yang dibatasi oleh parabola dan spiral serta menghitung volume silinder, paraboloid, dan segmen bola.

Dalam salah satu penemuan yang paling terkenal, Archimedes menunjukkan bahwa volume bola adalah dua pertiga dari volume silinder terkecil yang dapat menampungnya. Pencapaian ini mencerminkan pemahaman awal tentang bagaimana menghitung volume dan luas dengan pendekatan yang mirip dengan kalkulus integral, meskipun tanpa alat aljabar dan sistem bilangan yang kita miliki saat ini.

Archimedes juga memberikan prosedur untuk mendekati nilai π dan mengembangkan teknik untuk menghitung akar kuadrat, yang menunjukkan kemampuannya dalam merumuskan dan menerapkan konsep matematika yang kompleks. Di dalam risalahnya yang berjudul *The Method of Mechanical Theorems*, yang ditemukan pada tahun 1906, Archimedes menjelaskan bagaimana ia menggunakan pendekatan yang mengantisipasi ide-ide kalkulus integral. Dalam risalah ini, ia menggambarkan proses dan penemuan matematisnya dengan cara yang sangat relevan bagi perkembangan konsep integral.

Kontribusi Archimedes dalam bidang integral dan metodenya memberikan dasar yang kuat bagi perkembangan lebih lanjut dalam kalkulus. Meskipun ia bekerja dalam konteks sistem penomoran Yunani yang terbatas, cara berpikir dan tekniknya tetap relevan hingga kini, menunjukkan bahwa pemikiran matematisnya jauh melampaui zamannya (Anton et al., 2012).

2. Pengertian Integral

Integral berkaitan erat dengan perhitungan luasm volume, atau akumulasi suatu besaran. Untuk fungsi f yang didefinisikan pada interval $[a, b]$, integral dari f pada interval tersebut dilambangkan dengan:

$$\int_a^b f\,(x)dx$$

Simbol $\int$ disebut sebagai tanda integral, yang pada awalnya berasal dari huruf "s" yang memanjang, melambangkan "sum" atau penjumlahan. Dalam konteks ini, a adalah batas bawah dan b adalah batas atas integrasi, sedangkan dx menunjukkan bahwa pengintegralan dilakukan terhadap variabel x.

Secara umum, integral dapat dibagi menjadi dua kategori utama: integral tak tentu dan integral tertentu. Integral tak tentu adalah suatu konsep dalam kalkulus yang berkaitan dengan menemukan fungsi yang, ketika diturunkan, menghasilkan fungsi asalnya. Hasil dari integral tak tentu ditulis sebagai fungsi baru, ditambah dengan angka tetap (konstanta). Ini menunjukkan bahwa ada banyak fungsi yang bisa menjadi hasil antiderivatif tersebut. Integral tak tentu mencerminkan hubungan antara turunan dan fungsi asal.

Sementara itu, integral tentu digunakan untuk menghitung luas area di bawah kurva suatu fungsi antara dua titik tertentu, yaitu batas bawah a dan batas atas b. Hasil dari integral tentu adalah angka yang menunjukkan seberapa besar luas area tersebut. Integral dapat dinyatakan dalam notasi matematika sebagai berikut:

- Integral Tak Tentu: $\int f(x)\,dx$
- Integral Tentu: $\int_a^b f\,(x)dx$

Di sini, $f(x)$ adalah fungsi yang diintegrasikan, dan a dan b adalah batas bawah dan batas atas dari integral tertentu.

B. Integral Tak Tentu

1. Definisi Integral Tak tentu

Integral tak tentu adalah suatu proses matematika yang digunakan untuk menemukan fungsi asli dari sebuah fungsi turunan yang telah diketahui. Berbeda dengan integral tentu yang memberikan nilai numerik spesifik, integral tak tentu menghasilkan fungsi keluarga yang mencakup semua kemungkinan fungsi yang dapat memiliki turunan sama. Ini ditunjukkan dengan adanya konstanta integrasi yang biasanya dilambangkan dengan *C.*

Notasi untuk integral tak tentu adalah:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Keterangan:

- $\int$ adalah simbol integral (diperkenalkan oleh Leibniz)
- $f(x)$ disebut *integrand*, yaitu fungsi yang diintegralkan.
- dx adalah simbol yang menunjukkan variabel yang digunakan dalam integrasi.

- $F(x)$ adalah antiderivatif dari $f(x)$, yaitu fungsi yang jika diturunkan, akan menghasilkan $f(x)$.
- C adalah konstanta integrasi yang tidak diketahui, karena antiderivatif tidak unik — tidak setiap fungsi dapt ditambah dengan suatu konstanta tanpa mengubah sifat dasar dari turunan.

Sebagai contoh, jika kita memiliki fungsi:

$$f(x) = x^2$$

Antiderivatifnya adalah:

$$F(x) = \frac{1}{3}\,x^3 + C$$

Ini dapat diverifikasi dengan mengambil turunan dari $F(x)$ yang akan menghasilkan kembali fungsi asal, yaitu $f(x) = x^2$.

Proses integral tak tentu ini disebut juga *antidiferensiasi*, karena kebalikan dari diferensiasi (turunan). Secara umum setiap antoderivatif dari suatu fungsi dapat ditemukan dengan menambah konstanta C pada hasil integrasi.

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}\,x^3 + C$$

maka setiap turunan dari bentuk $\frac{1}{3}\,x^3 + C$ akan menghasilkan kembali $f(x) = x^2$.

2. Rumus-rumus Dasar Integral Tak Tentu

Berikut adalah beberapa rumus dasar integral tak tentu yang sering digunakan:

a. Fungsi Polinomial

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq 1)$$

b. Fungsi Eksponensial

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

c. Fungsi trigonometri

- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
- $\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + C$
- $\int \csc^2(x) \, dx = -\cot(x) + C$
- $\int \sec(x) \, tan \, x \, dx = \sec(x) + C$
- $\int \csc(x) \, cot \, x \, dx = -\csc(x) + C$

d. Fungsi Rasional

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \text{In} \, |x| + C$$

e. Fungsi Akar

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx$$

3. Teknik-teknik Pengintegralkan

Dalam menyelesaikan soal integral tak tentu, terdapat beberapa teknik yang dapat digunakan tergantung pada bentuk fungsi yang diintegralkan. Berikut adalah teknik-teknik umum yang bisa dipakai:

a. Substitusi

Metode substitusi digunakan ketika fungsi yang diintegralkan memiliki bentuk komposit, yaitu fungsi dari fungsi lain. Kita dapat mengganti variabel untuk menyederhanakan integral.

Langkah-Langkah Substitusi:

- Tentukan bagian dalam dari fungsi yang diintegralkan, dan ganti dengan variabel baru.
- Diferensiasikan variabel baru tersebut untuk menggantikan dx.

- Integralkan fungsi yang sudah disederhanakan.
- Kembalikan variabel asli ke dalam hasil akhir.

Contoh:

$$\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx$$

Substitusi $u = x^2$, sehingga $du = 2x\, dx$. Integral menjadi:

$$\int e^u\, du = e^u + C = e^{x^2} + C$$

b. Pengintegralan Parsial

Teknik ini digunakan ketika kita mengintegralkan produk dari dua fungsi. Rumus dasarnya adalah:

$$\int u\, du = u \cdot v - \int v\, du$$

Di mana *u* dan *dv* adalah fungsi yang dipilih dari integran awal, yang kemudian diturunkan dan diintegralkan secara terpisah.

Langkah-Langkah:

- Tentukan *u* dan *dv* dari integran.
- Hitung turunan dududu dan integral dari *dv* untuk mendapatkan *v*.
- Terapkan rumus integrasi parsial.

Contoh:

$$\int x \cdot e^x\, dx$$

Pilih $u = x$ dan $dv = e^x\, dx$. Maka $du = dx$ dan $v = e^x$. Dengan rumus integral parsial:

$$\int x \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - \int e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

c. Pengintegralan Fungsi Rasional dengan Pecahan Parsial

Fungsi rasional, yaitu pecahan dari polinomial, dapat diintegralkan dengan cara memecahnya menjadi pecahan parsial yang lebih sederhana.

Contoh: Integralkan $\frac{2x}{x^2-1}$.

Pecahan tersebut dapat dipecah menjadi:

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

Sehingga integralnya adalah:

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = \text{In}\,|\mathrm{x}-1| + \text{In}\,|x+1| + C$$

4. Aplikasi Integral Tak Tentu

Integral tak tentu tidak hanya merupakan alat analisis matematis yang kuat, tetapi juga memiliki berbagai aplikasi praktis:

a. Fungsi Posisi dari Kecepatan atau Percepatan
Dalam fisika, integral tak tentu digunakan untuk menemukan posisi dari sebuah objek jika diketahui kecepatannya. Misalkan diketahui $v(t) = 5t$, maka posisi $s(t)$ adalah:

$$s(t) = \int v(t)dt = \int 5t\,dt = \frac{5t^2}{2} + C$$

Di mana C dapat ditentukan dari kondisi awal.

b. Penghitungan Luas dan Volume
Integral tak tentu juga digunakan dalam menghitung luas area di bawah kurva dan volume benda padat dengan metode irisan.

5. Contoh Soal Integral Tak Tentu

1) Hitunglah:

$$\int ((2x^3 + 4x)^7 (6x^2 + 4))\,dx$$

- Pisahkan integral

$$\int ((2x^3 + 4x)^7 (6x^2 + 4))\, dx = \int (2x^3 + 4x)^7\, dx$$

- Hitung integral pertama menggunakan substitusi

  Misalkan $x = 2x^3 + 4x$, maka turunan dari x adalah $dx = (6x^2 + 4)\, dx$. Hal ini menunjukkan bahwa $(6x^2 + 4)\, dx$ dapat digantikan dengan *dx,* maka:

$$\int ((2x^3 + 4x)^7 (6x^2 + 4))\, dx = \int x^7\, dx$$

- Hitung integral dari u^7 dengan rumus polinomial dengan *n* = 7

$$\int x^7\, dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + C = \frac{x^8}{8} + C$$

- Kembalikan ke bentuk semula

$$\frac{(2x^3 + 4x)^8}{8} + C$$

- Hasil akhirnya adalah:

$$\int ((2x^3 + 4x)^7 (6x^2 + 4))\, dx = \frac{(2x^3 + 4x)^8}{8} + C$$

2) Hitunglah: $\int (15x^3 - 3\sec^2(2x))\, dx$

   Penyelesaian:

- Pisahkan integral

$$\int 15x^3 - 3\ \sec^2(2x))\, dx = \int 15x^3\, dx - \int 3\ \sec^2(2x)\, dx$$

- Hitung integral pertama menggunakan rumus integral polinomial

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n\ \neq 1)$$

Dengan n = 3:

$$\int 15x^3\ dx = 15 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = 15 \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{15}{4}\ x^4 + C$$

- Hitunglah integral kedua menggunakan substitusi

  Misalkan $u = 2x$, maka $= 2\ dx$ atau $dx = \frac{du}{2}$.

$$\int 3\sec^2(2x)\ dx = 3\int \sec^2(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{3}{3}\int \sec^2(u)\ du$$

  Karena:

$$\int \sec^2(u)du = \tan(u) + C = \tan(2x) + C$$

  Maka:

$$\frac{3}{2}\tan(2x) + C$$

- Gabungkan hasilnya setelah menghitung kedua integral, maka hasil akhirnya adalah:

$$\int 15x^3 - 3\ \sec^2(2x))\ dx = \frac{15}{4}\ x^4 - \frac{3}{2}\tan(2x) + C$$

3) Hitunglah

$$\int 3\sqrt{x}\ dx$$

Penyelesaian:

- Ubah bentuk akar menjadi bentuk eksponensial:

$$3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$$

- Hitung menggunakan rumus integral:

  Dengan $n = \frac{1}{2}$:

$$\int 3x^{\frac{1}{2}}dx = 3 \cdot \frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)+1} + C$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 3 \cdot \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + C = 2x^{\frac{3}{2}} + C$$

- Hasil akhirnya:

$$\int 3\sqrt{x}\, dx = \ 2x^{\frac{3}{2}} + C$$

C. Integral Tentu

1. Pengertian Integral Tentu

Integral tentu adalah suatu cara untuk menghitung luas di bawah kurva fungsi tertentu dalam interval tertentu. Jika ada fungsi $f\ (x)$ yang kontinu pada interval [a, b], maka integral tentu dari $f\ (x)$ dalam interval tersebut, ditulis sebagai:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Integral ini menghitung nilai bersih dari luas di antara kurva $f\ (x)$ dan sumbu-x dari titik $x = a$ hingga $x = b$. Nilai ini bias positif atau negative tergantung pada apakah kurva berada di atas atau dibawah sumbu-x.

2. Pendekatan geometris

Pendekatan geometris untuk integral tentu pada dasarnya adalah menghitung luas di bawah kurva fungsi tertentu di antara dua titik. Jika fungsi $f(x)$ kontinu pada interval [a, b], maka integral tentu dari $f(x)$ akan menghitung luas aljabar dari daerah yang dibatasi oleh kurva fungsi $f(x)$, sumbu x, dan garis vertical pada $x = a$ dan $x = b$.

Dalam konteks ini, luas aljabar berarti:

- Jika kurva berada di atas sumbu x, luas tersebut positif
- Jika kurva berada di bwah sumbu x, luas tersebut negatif.

Ini adalah dasar konsep geometris dari integral, yang menyederhanakan perhitungan area yang tidak terbatas pada bentuk geometris biasa seperti persegi panjang atau segitiga. Sebagai contoh, jika kita ingin menghitung luas di bawah parabola $f(x) = x^2$ pada interval [0, 1], kita bias membaginya menjadi sejumlah kecil persegi panjang yang luasnya dihitung dan dijumlahkan. Ini adalah ide dasar dari Riemann Sum.

Dalam pendekatan Riemann, interval [a, b] dibagi menjadi sejumlah sub-interval kecil. Pada setiap sub-interval, kita membantum persegi panjang yang tingginya adalah nilai fungsi $f(x)$ pada titik dalam sub-interval tersebut, dan lebarnya adalah panjang sub-interval tersebut. Ketika sub-interval ini semakin kecil (sehingga jumlah persegi panjang semakin banyak), jumlah luas persegi panjang ini mendekati luas di bawah kurva yang sebenarnya.

Secara matematis, integral tentu dapat dinyatakan sebagai limit dari jumlah Riemann ini:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

di mana Δx_i adalah panjang sub-interval dan x_i adalah titik dalam sub-interval tersebut.

3. Teorema Dasar Kalkulus

Teorema dasar integral adalah konsep yang menghubungkan antara operasi turunan (diferensiasi) dan integral. Ini merupakan inti dari kalkulus, karena menunjukkan bahwa kedua proses tersebut saling terkait dan pada dasarnya merupakan operasi yang berlawanan.

a. Teorema bagian pertama
   Bagian pertama teorema ini menyatakan bahwa jika fungsi $f(x)$ adalah fungsi kontinu pada interval [a, b], maka fungsi $F(x)$ yang didefinisikan sebagai integral dari $f(x)$ adalah antiderivatif dari $f(x)$ atau secara matematis:

$$F(x) = \int_a^b f(\,t)dt$$

Maka, turunan dari $F(x)$ adalah $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Ini menunjukkan bahwa proses pengintegralan dan pendiferensian saling membatalkan satu sama lain.

b. Teorema bagian kedua
Bagian kedua teorema dasar memberikan cara prsktis untuk menghitung integral tentu. Jika $F(x)$ adalah antiderivatif dari $f(x)$, maka integral tentu $f(x)$ dari a hingga b dapat dihitung sebagai selisih nilai antiderivatif di batas-batas interval:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dengan kata lain, untuk menghitung integral tentu, kita hanya perlu menemukan antiderivatif dari fungsi tersebut, kemudian menghitung selisih nilai antiderivatif pada batas atas dan batas bawah.

Contoh:

Jika kita ingin menghitung integral dari $f(x) = x^2$ pada interval $[1, 2]$, kita terlebih dahulu menemukan antiderivatifnya, yaitu $F(x) = \frac{x^2}{3}$. Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus, integral tentu dari 1 hingga 2 adalah:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Teorema ini menghubungan proses diferensiasi dan integral, memungkinkan kita untuk menghitung integral tentu dengan lebih efisien melalui antiderivatif.

4. Karakteristik Integral Tentu

a. Sifat penjumlahan

Jika f dan g adalah fungsi yang dapat diintegralkan pada interval [a, b], maka fungsi $f + g$ juga dapat diintegralkan, dan berlaku:

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Pernyataan ini menunjukkan bahwa integral dari penjumlahan fungsi adalah penjumlahan dari integral masing-masing fungsi.

b. Sifat linier

Jika f adalah fungsi yang dapat diintegralkan dan c adalah konstanta, maka:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Sifat ini mencerminkan bahwa kita dapat mengalikan fungsi dengan konstanta sebelum atau setelah proses integrasi, dan hasilnya tetap sama.

c. Pembalikan batas

Jika batas integral dibalik, maka tanda integral juga berubah, sebagaimana dinyatakan dalam rumus berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Pernyataan ini mencerminkan bahwa integral mengukur area dengan mempertimbangkan arah pengukuran.

d. Additivitas interval

Apabila terdapat titik c di antara a dan $b,$ maka integral dapat dibagi menjadi dua bagian sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Karakteristik ini sangat berguna ketika ingin menghitung integral dalam beberapa bagian.

e. Batas nilai integral

Jika f adalah fungsi yang kontinu pada interval >0,[a, b], maa terdapat batas bawah m dan batas atas M sehingga:

$$m(b-1) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

Pernyataan ini menunjukkan bahwa nilai integral akan berada di antara nilai minimum dan maksimum fungsi dalam interval tersebut.

f. Kriteria integrabilitas

Sebuah fungsi f yang terikat pada interval [a, b] adalah *integrable* jika untuk setiap $\in > 0$, ada pembagian P dari [a, b] sehingga selisih antara jumlah atas dan jumlah bawah kurang dari ∈:

$$U(f,P) - L(f,P) < \in$$

Kriteria ini membantu kita memahami fungsi mana yang dapat diintegralkan dan mana yang tidak.

5. Contoh Soal Integral Tentu

1) Hitunglah

$$\int_2^{10} \frac{3x^2 + 2x\sqrt{x} - 4}{x^2}\, dx$$

Penyelesaian:

- Sederhanakan pecahan dalam integral

$$\frac{3x^2 + 2x\sqrt{x} - 4}{x^2} = 3 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}$$

- Pisahkan integral

$$\int_2^{10} \left(\frac{3x^2 + 2x\sqrt{x} - 4}{x^2}\right) dx = \int_2^{10} 3\, dx = \int_2^{10} \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx - \int_2^{10} \frac{4}{x^2}\, dx$$

- Hitung masing-masing integral

  Integral pertama:

$$\int_{2}^{10} 3\, dx = 3 \cdot (10 - 2) = 24$$

  Integral kedua:

$$\int_{2}^{10} \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx = 4\,(\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

  Integral ketiga:

$$\int_{2}^{10} \frac{4}{x^2}\, dx = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

- Gabungkan hasilnya, maka:

$$\int_{2}^{10} \left(\frac{3x^2 + 2x\,\sqrt{x} - 4}{x^2}\right) dx = 24 + 4\big(\sqrt{10} - \sqrt{2}\big) - \frac{8}{5}$$

- Hasil akhir:

$$= 24 - \frac{8}{5} + 4\sqrt{10} - 4\sqrt{2}$$

$$= \frac{112}{5} + 4\sqrt{10} - 4\sqrt{2}$$

2) Tunjukkan bahwa nilai dari $\int_0^1 \sqrt{2 + \cos x\, dx}$ adalah kurang dari atau sama dengan $\sqrt{3}$.
   Penyelesaian:

- Cari nilai maksimum dan minimum dari $\sqrt{2 + \cos x}$:
  - Nilai maksimum dari $\cos x$ adalah 1, yang terjadi pada $x = 0$
  - Nilai minimum dari $\cos x$ adalah -1, yang terjadi pada $x = \pi$, tetapi pada interval $0 \le x \le 1$, nilai $\cos x$ mencapai minimum di sekitar $x = 1$.

Maka, untuk $2 = \cos x$:

- Nilai maksimum terjadi saat $\cos(0) = 1$, yaitu $2 + 1 = 3$. Jadi $\sqrt{2 + \cos x}$ mencapai maksimum $\sqrt{3}$.
- Nilai minimum terjadi saat $\cos(1) \approx 0{,}540$, yaitu $2 + 0{,}540 = 2{,}540$, sehingga $\sqrt{2 + \cos x}$ minimum sekitar $\sqrt{2{,}540}$.

- Terapkan *Max-Min Inequallity:* dengan menerapkannya, kita bias menghitung batas atas dan bawah integral:
  - Batas atas integral adalah $\sqrt{3}$ x $(1 - 0) = \sqrt{3}$.
  - Batas bawah integral adalah $\sqrt{2{,}540}$ x $(1 - 0) \approx 1{,}593$ x 1 = 1,593.
- Hasil akhir:

$$1{,}593 \leq \int_0^1 \sqrt{2 + \cos x}\ dx \leq \sqrt{3}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa integral tersebut kurang dari atau sama dengan $\sqrt{3}$, seperti yang diminta.

3) Hitunglah integral berikut dan buatlah grafik dari fungsi $y = x - 8\cos x$ untuk $x \in [0, 10]$:

$$\int_0^{10} (x - 8\ \cos x)\ dx$$

Penjelasan:

- Pisahkan integral:

$$\int_0^{10} (x - 8\cos x)\ dx = \int_0^{10} x\ dx - \int_0^{10} 8\ \cos x\ dx$$

- Hitung integral pertama $\int_0^{10} x\ dx$:

$$\int_0^{10} x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = \frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

- Hitung integral kedua $\int_0^{10} 8\ \cos x\ dx$:

$$\int_0^{10} 8\ \cos x\ dx = 8 \int_0^{10} \cos x\ dx$$

Dengan menghitung integral $\int \cos x\ dx$:

$$\int_0^{10} \cos x\ dx = \sin x \Big|_0^{10} = \sin(10) - \sin(0) = \sin(10)$$

Maka kita dapatkan:

$$\int_0^{10} 8 \cos x\ dx = 8 \sin(10)$$

- Gabungkan hasilnya:

$$\int_0^{10} (x - 8\ \cos x)\ dx = 50 - 8\ \sin(10)$$

- Menghitung nilai numerik dari 8 sin (10):

Nilai sin (10) $\approx -0{,}544$:

$$8\ \sin(10) \approx 8 \times -0{,}544 \approx -4{,}352$$

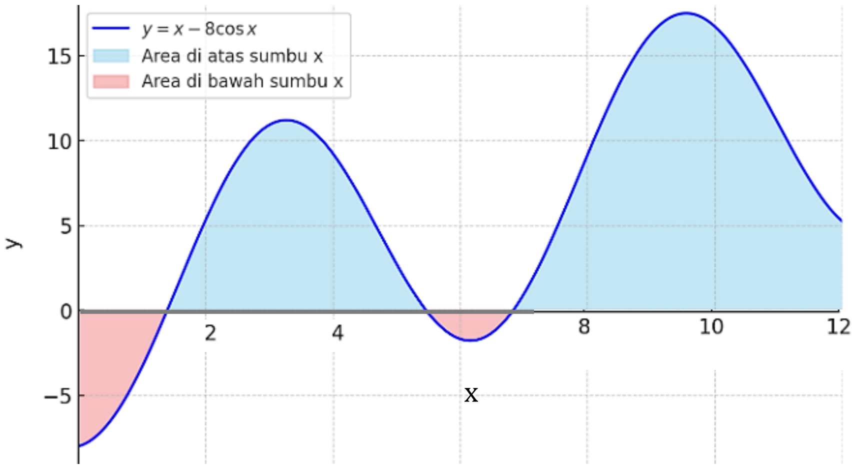
Sehingga kita dapatkan:

$$\int_0^{10} (x - 8\ \cos x)\ dx \approx 50 - (-4{,}352) = 50 + 4{,}352 \approx 54{,}352$$

- Hasil akhirnya adalah:

$$\int_0^{10} (x - 8\ \cos x)\ dx \approx 54{,}352$$

- Gambar grafik dari fungsi $f(x) = x - 8\ \cos(x)$ pada interval [0, 10] adalah sebagai berikut:



Gambar 10. 1 Grafik $\boldsymbol{y = x - 8\cos(x)}$

DAFTAR PUSTAKA

Adams, R. A. & Essex, C. (2010). *Calculus a Complete Course* (7th ed.) Pearson.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus* (10th ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Spivak, M. (2008). *Calculus* (4th ed.). Publish or Perish, Inc.

Stewart, J. (2016). *Calculus* (8th ed.). Cengage Learning.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2013). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (13th ed.). Pearson.

BAB 11
TEKNIK INTEGRASI

A. Pendahuluan

Bentuk-bentuk integrasi baku

1. $\int k\, du = ku + C$
2. $\int u^r\, du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C, & r \neq -1 \\ ln|u| & , \; r = -1 \end{cases}$
3. $\int e^u du = e^u + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u\, du = \sin u + C$
7. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$
8. $\int \csc^2 u\, du = -\cot\, u + C$
9. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$
10. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$
11. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos\, u| + C$
12. $\int \cot u\, du = \ln|\sin\, u| + C$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
14. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
15. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C = \frac{1}{a} cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right) + C$
16. $\int \sinh u\, du = \cosh u + C$
17. $\int \cosh u\, du = \sinh u + C$

Dalam menyelesaikan masalah integral, maka soal harus dibawa ke salah satu bentuk atau beberapa bentuk tertentu sebagaimana tercantum dalam bentuk-bentuk integral baku di atas. Untuk itu diperlukan teknik-teknik tertentu yang selanjutnya disebut teknik pengintegralan (integrasi).

B. Integrasi Dengan Substitusi

1. Substitusi dalam Integral tak-tentu

Teorema:
Misalkan g adalah fungsi yang terdiferensiasikan dan misalkan F adalah antiturunan f.
Jika $u = g(x)$, maka

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F\big(g(x)\big) + C$$

Contoh:

Carilah $\int \frac{6e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

Penyelesaian:

Ingatlah bentuk baku $\int e^u\,du = e^u + C$
Misalkan $u = \frac{1}{x}$, maka diperoleh $du = -\frac{1}{x^2}\,dx$ atau $-du = \frac{1}{x^2}\,dx$
sehingga integrasi menjadi

$$\begin{aligned}\int \frac{6e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx &= \int 6e^{\frac{1}{x}}.\,\frac{1}{x^2}\,dx\\ &= \int 6e^u\,(-du) = -\int 6e^u\,du\\ &= -6\int e^u\,du = -6e^u + C = -6e^{\frac{1}{x}} + C\end{aligned}$$

2. Substitusi dalam Integral Tentu

Sama seperti dalam integral tak-tentu, tetapi perlu diingat untuk melakukan perubahan yang sesuai dalam batas-batas.

Contoh:

Hitunglah $\int_0^2 x(x^2+1)^5\ dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + 1$, sehingga $du = 2x\,dx$ atau $\frac{1}{2}du = x\,dx$; perhatikan jika $x = 0$, maka $u = 1$ dan jika $x = 2$, maka $u = 5$. Jadi,

$$\begin{aligned}\int_0^2 x(x^2+1)^5\ dx &= \int_1^5 u^5\ \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_1^5 u^5\ du\\ &= \left[\frac{1}{12}\ u^6\right]_1^5\\ &= \frac{5^6}{12} - \frac{1}{12}\end{aligned}$$

C. Beberapa Integral Trigonometri

Jika metode substitusi dikombinasikan dengan pemakaian kesamaan trigonometri yang tepat, maka banyak bentuk trigonometri dapat diintegralkan.

1. Bentuk $\int sin^n\, x\ dx$ dan $\int cos^n\, x\ dx$

Untuk n bilangan bulat positif dan ganjil.
Setelah faktor $\sin x$ dan $\cos x$ dikeluarkan, gunakan kesamaan $sin^2x + cos^2x = 1$.

Contoh:
Carilah $\int \cos^3 x\ dx$.
Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\ dx &= \int \cos^2 x\ \cos x\ dx\\ &= \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx\\ &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C\end{aligned}$$

Untuk n bilangan genap.
Dalam hal ini digunakan kesamaan setengah sudut yaitu $sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ atau $cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Contoh :

$$\int \sin^2 x \; dx \;=\; \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int (\cos 2x)\,(2\,dx)$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

2. Bentuk $\int sin^m x \;\; cos^n x \;\; dx$

Jika salah satu m atau n bilangan bulat positif ganjil sedangkan eksponen yang satunya bilangan sebarang, maka $\sin x$ atau $\cos x$ difaktorkan dan digunakan kesamaan $sin^2 x + cos^2 x = 1$.

Contoh:

$$\int \sin^3 x \cos^{-4} x \; dx = \int \sin^2 x \; \cos^{-4} x \; \sin x \; dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\cos^{-4} x \,(\sin x \; dx)$$
$$= \int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x)\,(\sin x \; dx)$$
$$= -\int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x)\,(-\sin x \; dx)$$
$$= -\left(\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} - \frac{(\cos x)^{-1}}{-1}\right) + C$$
$$= \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$$
$$= \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$$

Jika m dan n keduanya merupakan bilangan bulat positif genap, maka digunakan kesamaan setengah sudut untuk memperkecil derajat integran.

Contoh:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x \; dx &= \int \sin^2 x \,(\cos^2 x)^2 \, dx \\
&= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \; dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left[1+\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x) - (1-\sin^2 2x)\cos 2x\right] \, dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + \sin^2 2x \cos 2x\right) \, dx \\
&= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2} \; dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\,(4 \; dx) + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x(2\cos 2x)dx\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\;x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) \; + \; C \\
&= \frac{1}{16}\;x \;-\; \frac{1}{64}\sin 4x \;+\; \frac{1}{48}\sin^3 2x\; n \;+\; C
\end{aligned}
$$

3. Bentuk $\int \sin mx \; \cos nx \; dx$, $\int \sin mx \sin nx \; dx$, $\int \cos mx \cos nx \; dx$

Untuk menangani integral – integral jenis ini, digunakan kesamaan hasilkali.

(i) $\sin mx \; \cos nx = \frac{1}{2}\{\sin(m+n)\,x + \sin(m-n)\,x\}$

(ii) $\sin mx \; \sin nx = -\frac{1}{2}\{\cos(m+n)\,x - \cos(m-n)\,x\}$

(iii) $\cos mx \; \cos nx = \frac{1}{2}\{\cos(m+n)\,x + \cos(m-n)\,x\}$

Contoh 1:

Carilah $\int \sin 2x \; \cos 3x \; dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x \ \cos 3x \ dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(2+3)x + \sin(2-3)x]\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int [\sin 5x + \sin(-x)]\ dx \\
&= \frac{1}{10}\int \sin 5x\ (5\ dx) - \frac{1}{2}\int \sin x\ dx \\
&= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C
\end{aligned}$$

Contoh 2:

Carilah $\int \sin 5t \ \sin\ 2t\ \ dt$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\int \sin 5t \ \sin\ 2t\ dt &= \int -\frac{1}{2}[\cos(5+2)t - \cos(5-2)t] \\
&= -\frac{1}{2}\int (\cos\ 7t - \cos\ 3t)\, dt \\
&= -\frac{1}{14}\int \cos\ 7t\ (7\ dt) + \frac{1}{6}\int \cos\ 3t\ (3\ dt) \\
&= -\frac{1}{14}\sin 7t + \frac{1}{6}\sin 3t + C
\end{aligned}$$

Contoh 3:

Carilah $\int \cos\ y\ \cos 2y\ \ dy$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\int \cos\ y\ \cos 2y\ dy &= \int \frac{1}{2}[\cos(1+2)y + \cos(1-2)y]\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int [\cos\ 3y + \cos\ (-y)]\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int (\cos\ 3y + \cos\ y)\, dy \\
&= \frac{1}{6}\int \cos\ 3y\ (3\ dy) + \frac{1}{2}\int \cos\ y\ dy \\
&= \frac{1}{6}\sin 3y + \frac{1}{2}\sin y + C
\end{aligned}$$

D. Substitusi yang Merasionalkan

Bentuk akar dalam integran selalu menimbulkan kesulitan. Substutusi yang tepat akan merasionalkan integran tersebut.

1. Integral yang melibatkan $\sqrt[n]{ax+b}$

Jika $\sqrt[n]{ax+\mathrm{b}}$ muncul dalam suatu integral, subtitusi $u=\sqrt[n]{ax+b}$ akan menghilangkan akar.

Contoh:
Carilah $\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\ dx$

Penyelesaian:
Misalkan $u=(x+1)^{1/5}$ sehingga $u^5=x+1$ dan $5u^4\,du=dx$. Maka

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\ dx &= \int (u^5-1)\sqrt[5]{(u^5)^2}\ \ 5u^4\ du\\ &= 5\int (u^5-1)\ u^2u^4\,du = 5\int (u^{11}-u^6)\,du\\ &= 5\cdot\frac{u^{12}}{12}-5\cdot\frac{u^7}{7} = \frac{5}{12}u^{12}-\frac{5}{7}u^7+C\\ &= \frac{5}{12}(x+1)^{12/5}-\frac{5}{7}(x+1)^{7/5}+C\end{aligned}$$

2. Integral yang melibatkan $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$

Akar	Subtitusi	Pembatasan pada t
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	$0\le t\le\pi, t\ne\frac{\pi}{2}$

Sekarang perhatikan penyederhanaan yang dicapai oleh substitusi ini.

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = |a \cos t| = a \cos t$$
$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 t)} = \sqrt{a^2 \sec^2 t} = |a \sec t| = a \sec t$$
$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 t} = |a \tan t| = \pm\, a \tan t$$

Contoh:

Carilah $\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\, dx$

Penyelesaian:
Dengan mengambil substitusi $x = 3\ \tan t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, maka diperoleh $dx = 3\, sec^2 t\, dt$ dan $\sqrt{9 + x^2} = 3\ \sec\ t$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}\ dx &= \int \frac{3\ \tan t}{3 \sec\ t}\ .\ 3\, sec^2 t\, dt \\ &= 3 \int \tan t\ \sec\ t\ dt \\ &= 3\ \sec t\ +\ C \\ &= 3\left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{3}\right) +\ C \\ &= \sqrt{9 + x^2}\ +\ C \end{aligned}$$

3. Melengkapi Kuadrat

Apabila persamaan kuadrat berjenis $ax^2 + bx + c$ muncul dibawah tanda akar dalam integran, melengkapi kuadrat akan mempersiapkannya untuk substitusi trigonometri.

Contoh :

Carilah $\int \frac{dx}{(x - 3)\sqrt{x^2 - 6x - 7}}$

Penyelesaian:

Perhatikan $x^2 - 6x - 7 = x^2 - 6x + 9 - 16 = (x - 3)^2 - 16$.
Misalnya $u = x - 3$, maka diperoleh $du = dx$. Akibatnya:

$$\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x-7}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-16}}$$

Dengan mengambil $u = 4\sec t$, maka diperoleh $du = 4\ \sec\ t\ \tan\ t\ \ dt$ dan $\sqrt{u^2-16} = 4\tan t$. Selanjutnya diperoleh

$$\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x-7}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-16}}$$

$$= \int \frac{4\ \sec\ t\ \tan\ t\ \ dt}{4\sec t\,.\ 4\tan t}$$

$$= \int \frac{1}{4}\ dt = \frac{1}{4}\ t + C$$

Perhatikan bahwa $u = 4\sec t$ setara dengan $\frac{u}{4} = \sec t$ dan $u = x-3$. Akibatnya $t = \sec^{-1}\left(\frac{u}{4}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{x-3}{4}\right)$. Jadi,

$$\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x-7}} = \frac{1}{4}\sec^{-1}\left(\frac{x-3}{4}\right) + C$$

E. Integral Parsial

Jika integrasi menggunakan subtitusi gagal, kita mungkin saja dapat menggunakan subtitusi ganda. Yang lebih dikenal dengan *Integrasi Parsial*. Metode ini didasarkan pada integrasi dari rumus untuk turunan dari hasil kali dua fungsi.

Misalkan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$. Maka:

$$D_x[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

atau

$$u(x)v'(x) = D_x[u(x)v(x)] - v(x)u'(x)$$

Dengan mengintegrasi kedua ruas persamaan tersebut, maka diperoleh

$$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\ dx$$

1. Integrasi Parsial : Integral Tak-Tentu

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

Contoh:
Carilah $\int x \ \cos x \ dx$
Penyelesaian :
Misalkan $u = x$ dan $dv = \cos\ x\ dx$, maka diperoleh $du = dx$ dan $v = \int dv = \int \cos\ x\ dx = \sin x$ (konstanta pada tahap ini dapat dihilangkan)
Rumus integrasi parsial memberikan

$$\begin{aligned}\int x \ \cos x \ dx &= x \ \sin x - \int \sin x \ dx \\ &= x \ \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \ \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

2. Integrasi Parsial : Integral Tentu

$$\int_a^b u \ dv = [uv]_a^b - \int_a^b v \ du$$

Contoh:
Carilah $\int_1^2 \ln x \ dx$
Penyelesaian:
Dilakukan substitusi berikut:

$$u = \ln x \qquad\qquad dv = dx$$

$$du = \left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad\qquad v = x$$

Maka

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x \ dx &= [x \ \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \ \left(\frac{1}{x}\right) \ dx \\ &= (2 \ \ln 2 - 1 \ \ln 1) - \int_1^2 dx \\ &= 2 \ \ln 2 - [x]_1^2 \\ &= 2 \ \ln 2 - (2 - 1) \\ &= 2 \ \ln 2 - 1 \ \approx 0{,}386\end{aligned}$$

3. Integrasi Parsial Berulang

Seringkali penting menerapkan integrasi parsial beberapa kali.
Suatu rumus berbentuk:

$$\int f^n(x)\ dx = g(x) + \int f^k(x)\ dx$$

dengan $k < n$ dinamakan rumus reduksi (pangkat f direduksi/berkurang). Rumus-rumus demikian seringkali diperoleh dengan menggunakan integrasi parsial.

Contoh:

Carilah $\int x^2 \sin x\ dx$

Penyelesaian:
Misalkan

$$u = x^2 \qquad\qquad dv = \sin x\ dx$$
$$du = 2x\ dx \qquad\qquad v = -\cos x$$

Maka

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x\ dx &= x^2(-\cos x) - \int (-\cos x)\ 2x\ dx \\ &= -x^2\ \cos x\ +\ 2\int x\ \cos x\ dx \end{aligned}$$

Untuk $\int x\ \cos x\ dx$, telah diperoleh bahwa

$$\int x\ \cos x\ dx = x\ \sin x\ +\ \cos x\ +\ C$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x\ dx &= -x^2\ \cos x\ +\ 2(x\ \sin x\ +\ \cos x\ +\ C) \\ &= x^2\ \cos x\ + 2x\ \sin x\ +\ 2\ \cos x\ +\ K \end{aligned}$$

F. Integrasi Fungsi Rasional

Fungsi rasional yang dimaksud sebagai fungsi berbentuk $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ masing-masing merupakan fungsi suku banyak. Misalnya

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \qquad g(x) = \frac{2x+2}{x^2 - 4x + 8}$$

Jika derajat $P(x)$ lebih kecil daripada derajat $Q(x)$, maka $\frac{P(x)}{Q(x)}$ disebut fungsi rasional sejati. Jika tidak demikian, maka $\frac{P(x)}{Q(x)}$ fungsi rasional tak sejati.

Dalam hal $\frac{P(x)}{Q(x)}$ merupakan fungsi pecah rasional tak sejati, maka $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan fungsi suku banyak dan fungsi pecah rasional sejati, yaitu:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

dengan $H(x), S(x)$ masing-masing suku banyak dan derajat $S(x)$ kurang dari derajat $Q(x)$.

Dengan demikian diperoleh suatu formula:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx = \int H(x)\ dx + \int \frac{S(x)}{Q(x)}\ dx$$

Pada bagian ini cukup dibicarakan $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx$ dengan $\frac{P(x)}{Q(x)}$ merupakan fungsi pecah rasional sejati.

Apabila $P(x) = k.Q'(x)$, dengan k konstanta sembarang, maka

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx = k.ln|Q(x)| + C$$

Jika tidak demikian maka terlebih dahulu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dinyatakan sebagai jumlahan atas pecahan-pecahan bagian.

Untuk dapat memisahkan $\frac{P(x)}{Q(x)}$ atas pecahan-pecahan bagian, maka perlu di tinjau 4 kasus berikut:

(i) Akar-akar $Q(x) = 0$ semua real dan berbeda

Misalkan $Q(x) = 0$ semua akarnya real dan berbeda, namakan $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka

$$Q(x) = k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

dengan k konstanta sembarang. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $k = 1$.

Jadi $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$. Sehingga

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - x_n)}$$

dengan $A_1, A_2, \dots, A_n$ konstanta-konstanta yang dapat ditentukan dari persamaan tersebut. Selanjutnya diperoleh

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1}{(x - x_1)} dx + \int \frac{A_2}{(x - x_2)} dx + \cdots + \int \frac{A_n}{(x - x_n)} dx$$

Contoh:
Tentukan

$$\int \frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$$

Karena penyebutnya diuraikan sebagai $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x + 1)(x - 3)$, maka dapat dituliskan:

$$\frac{5x + 3}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 3}$$

Maka akan diperoleh:

$$5x + 3 = A(x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 1)$$

Subtitusikan $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$ sehingga didapatkan:

$$\frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{-1}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{3}{2}}{x - 3}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx &= \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x + 1} dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x - 3} dx \\ &= -\int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x + 1| + \frac{3}{2}\ln|x - 3| + C\end{aligned}$$

(ii) Akar-akar $Q(x) = 0$ semua real dan ada yang sama

Misalkan $Q(x) = (x - x_1)^r (x - x_{r+1}) \dots (x - x_n)$ dengan $x_i \neq x_j, \quad \forall i \neq j, \; i,j = 1, r+1, r+2, \dots, n$.

Selanjutnya fungsi pecah rasional dapat dinyatakan:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r} + \frac{A_{r+1}}{(x - x_{r+1})} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_n)}$$

dengan $A_1, A_2, \dots, A_n$ konstanta-konstanta yang dapat ditentukan dari persamaan tersebut.

Contoh:

Tentukan

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} \, dx$$

Penyelesaian:

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Dengan cara yang sama pada contoh sebelumnya . Maka didapatkan:

$3x^2 - 8x + 13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)$

Subtitusikan $x = 1$, $x = -3$, dan $x = 0$ menghasilkan $C = 2$, $A = 4$ dan $B = -1$.

Jadi,

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} \, dx = 4 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 4 \ln|x+3| - \ln|x| - \frac{2}{x-1} + C$$

(iii) $Q(x) = 0$ mempunyai akar-akar tidak real yang berbeda

Misalkan $Q(x) = \{(x-a)^2 + b^2\}(x - x_3) \dots (x - x_n)$, maka

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{A_3}{(x - x_3)} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_n)}$$

dengan $A_1, B_1, A_3, \dots, A_n$ konstanta-konstanta yang dapat ditentukan dari persamaan tersebut.

Contoh:
Tentukan
$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$$
Penyelesaian:
$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$
Untuk menentukan konstanta A, B dan C maka kalikan kedua ruas persamaan dengan $(4x+1)(x^2+1)$ dan diperoleh
$$6x^2 - 3x + 1 = A(x^2+1) + (Bx + C)(4x+1)$$
Subtitusikan $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$, dan $x = 1$ menghasilkan $A = 2\,, B = 1, C = -1.$
Jadi
$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)}\, dx = \int \frac{2}{4x+1}\, dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{4}{4x+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|4x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1} x + C$$

(iv) $Q(x) = 0$ mempunyai akar-akar tidak real dan ada yang sama
Misalkan
$Q(x) = \{(x-a)^2 + b^2\}^r (x - x_{2r+1})(x - x_{2r+2}) \dots (x - x_n)$,
maka
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 x + B_2}{\{(x-a)^2 + b^2\}^2} + \cdots + \frac{A_r x + B_r}{\{(x-a)^2 + b^2\}^r}$$
$$+ \frac{A_{2r+1}}{(x - x_{2r+1})} + \frac{A_{2r+2}}{(x - x_{2r+2})} + \cdots + \frac{A_n}{(x - x_n)}$$
dengan $A_1, A_2, \dots, A_r$, $A_{2r+1}, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_r$ konstanta-konstanta yang dapat ditentukan dari persamaan tersebut.

Contoh:

Tentukan $\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$

Penyelesaian:

$$\frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Dengan cara yang sama pada contoh sebelumnya, didapat $A = 1, B = -1, C = 3, D = -5, E = 0$.

Jadi

$$\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{dx}{x+3} dx - \int \frac{x-3}{x^2+2} dx$$
$$-5\int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx$$
$$= \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2} dx + 3\int \frac{dx}{x^2+2} - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx$$
$$= \ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{2(x^2+2)}$$
$$+ C$$

LATIHAN

Hitunglah integral berikut

1. $\int \sqrt{3x}\ dx$
2. $\int \sin 4y\ \cos 5y\ dy$
3. $\int x\ \sqrt[3]{x+\pi}\ dx$
4. $\int t\ e^{5t+\pi}\ dt$
5. $\int \frac{3}{x^2-1}\ dx$
6. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\ dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta\ d\theta$
8. $\int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}\ dt$
9. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x\ \sec^2 x\, dx$
10. $\int \frac{x^3}{x^2+x-2}\ dx$

DAFTAR PUSTAKA

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2004). Kalkulus Edisi Kedelapan Jilid 1.

Supama, Indrati, Ch. R., Salmah, Surodjo, B., Tari, M., & Zulijanto, A. (2002). Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada.

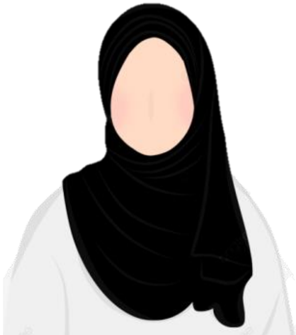
BIODATA PENULIS

Alvian Sroyer, S.Si., M.Si.
Dosen Program Studi Matematika
Fakultas MIPA, Universitas Cenderawasih Jayapura

Penulis lahir di Sorido-Biak tanggal 29 Agustus 1981. Penulis mulai mengikuti pendidikan formal mulai SD, SMP dan SMA di Kabupaten Biak-Numfor, dan pendidikan tinggi S1 di Program Studi Matematika FMIPA Universitas Cenderawasih pada tahun 2000 dan lulus tahun 2004. Kemudian melanjutkan Studi Magister (S2) di Program Magister Matematika, Institut Teknologi Bandung pada tahun 2006 dan lulus tahun 2009. Saat ini penulis adalah dosen tetap Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Cenderawasih, dan sedang mendapatkan tugas tambahan sebagai Wakil Dekan III FMIPA Universitas Cenderawasih. Buku yang telah ditulis dan terbit berjudul: *Machine Learning*, Metode Penelitian kuantitatif & Aplikasi Pengolahan Analisa Data Statistik, *Big Data Analytics*: Konsep, Implementasi, dan Aplikasi Terkini, Algoritma & pemrograman dengan GUI Matlab R2015b, Etnomatematika, Matematika Dasar dan *Data mining*: memahami pola dibalik angka.

---000---

BIODATA PENULIS



Williza Yanti, M.Pd
Dosen Pendidikan Matematika Universitas Nahdlatul Ulama Kalimantan Selatan

Penulis lahir di Banjarmasin tanggal 20 Juni 1992. Saat ini penulis menjabat sebagai Sekretaris Lembaga Penjaminan mutu di Universitas Nahdlatul Ulama Kalimantan Selatan.

Penulis memulai karier di Universitas Nahdlatul Ulama Kalimantan Selatan pada tahun 2018 dengan penempatan di program studi Pendidikan matematika fakultas keguruan dan ilmu Pendidikan. Semenjak diangkat menjadi dosen, menjabat menjadi dekan FKIP sejak tahun 2019 hingga tahun 2021. Setelah itu penulis pernah menjadi tim PPL, dosen Pamong untuk PPL dan juga pembimbing KKN, penulis juga pernah menjadi Koordinator MBKM serta Koordinator pertukaran Mahasiswa Merdeka (PMM). Saat ini penulis menjadi sekretaris Lembaga penjaminan mutu pada tahun 2024 hingga saat ini.

---000---

BIODATA PENULIS

Mayor M. H. Manurung, S.Pd., M.Pd.
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Cenderawasih

Penulis lahir di Biak tanggal 16 September 1983. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Cenderawasih Papua. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Pendidikan Matematika dan melanjutkan S2 pada Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya. Saat ini penulis mengampuh beberapa mata kuliah yang salah satunya adalah mata kuliah Kalkulus. Selain mengajar saat ini memiliki tugas tambahan sebagai Wakil Dekan Bidang Kemahasiswaan FKIP Universitas Cenderawasih Periode 2021- 2025.

Penulis dapat dihubungi melalui Alamat email:
mayormanurung16@gmail.com

---000---

BIODATA PENULIS

Abraham., M.Si.
Dosen Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Cenderawasih

Penulis lahir di Panyangkalan tanggal 12 Juli 1978. Penulis merupakan dosen tetap pada Program Studi Matematika-Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Cenderawasih, Jayapura-Papua. Penulis menyelesaikan pendidikan Sarjana S1 pada Jurusan Matematika dan melanjutkan pendidikan Magister S2 pada Tahun 2010 di Institut Teknologi Bandung dengan bidang keilmuan Matematika Terapan.

---000---

BIODATA PENULIS

Sumarni, S. Kom, M. Kom.
Dosen Program Studi Teknik Informatika
Fakultas Ilmu Komputer Universitas Ichsan Gorontalo

Penulis lahir di Addamareng tanggal 26 Januari 1986. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Informatika Fakultas Ilmu Komputer Universitas Ichsan Gorontalo. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Teknik Informatika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Teknik Informatika di Universitas Dians Nuswantoro. Pengalaman: ini buku pertama kali menulis. Tapi sebelumya penulis melakukan beberapa penelitian di bidang komputer dan menerbitkan beberapa jurnal bereputasi.

---000---

BIODATA PENULIS

Wa Malmia, S.Pd., M.Si.
Dosen Pendidikan Matematika
Fakultas Keguran dan Ilmu Pendidikan, Universitas Iqra Buru

Penulis lahir di Hative Kecil kota Ambon tanggal 21 April 1986. Penulis adalah dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Iqra Buru. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Darussalam Ambon dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin Makassar. Saat ini selain mengajar penulis juga menekuni bidang penelitian dan pengabdian kepada masyarakat.

---000---

BIODATA PENULIS

Dr. Fajriana, S.Si., M.Si.
Dosen Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, serta
Teknik Informatika Fakultas Teknik Universitas Malikussaleh

Penulis lahir di Lhokseumawe tanggal 20 Juli 1976. Penulis adalah dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, dan Teknik Informatika Fakultas Teknik, Universitas Malikussaleh. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Syiah Kuala, dan melanjutkan S2 serta S3 pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sumatera Utara.

---000---

BIODATA PENULIS

Usman Tahir ST. MT
Dosen Program Studi Teknik Elektro
Fakultas Teknologi Industri dan Kebumian, Universitas Sains dan Teknologi Jayapura (USTJ) Papua

Penulis lahir di Mareto Kab. Barru Sul-Sel, 15 Januari 1968. Gelar ST., (1996) dari UMI Makassar, Gelar M.T., (2001) dari ITS-Surabaya masing-masing dalm bidang Teknik Tenaga Listrik dan Sistem Pengaturan. Saat ini sedang menggeluti bidang ilmu Lingkungan di Universitas Brwijaya. Penulis aktif dalam berbagai riset rekayasa energi terbarukan dan juga menyusun buku chapter Green Technologi, Eksplorasi Aneka warna Teknik Elektro, Digital Society 4.0 Menghadapi revolusi Industri Keempat, Metodologi Penelitian dan sebagai dosen aktif pada bidang Teknik Elektro pada Fakultas Teknnologi Industri dan Kebumian USTJ dengan mengampu berbagai matakuliah termasuk Kalkulus.

---000--

BIODATA PENULIS

Didiek Hari Nugroho, S.T., MT.
Dosen Program Studi D4 Teknologi Kimia Industri
Jurusan Teknik Kmia, Politeknik Negeri Sriwijaya

Penulis Lahir di Maumere, 30 Oktober 1980, adalah alumni Sarjana (S1) Teknik Kimia Universitas Indonesia dan Magister (S2) Teknik Kimia Universitas Syiah Kuala. Selain itu juga merupakan alumni pada Program Drilling, Production and Liquidified Natural Gas Applied Competencies di Southern Alberta Institute of Technology (SAIT), Calgary, Canada; Program IVLP di Wright State University, Ohio, U.S.A; dan Program Wastewater Treatment di Environment Protection Training and Research Institute (EPTRI), Hyderabad, India. Penulis aktif mengajar di Program Studi D4 Teknologi Kimia Industri, salah satunya mata kuliah Kalkulus. Selain mengajar, penulis juga aktif menulis buku dan melakukan penelitian di bidang teknologi proses kimia dan pengolahan limbah industry. Berapa penelitian yang telah dilaksanakan oleh penulis dibiayai oleh DRPM Kemdikbudristek dan hasil penelitiannya juga diterbitkan di beberapa junal ilmiah nasional maupun internasional, buku, dan paten. Penulis sering juga di undang baik sebagai pembicara maupun konsultan yang merupakan bagian dalam melaksanakan kegiatan pengabdian kepada masyarakat.

Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: dh.nugroho@polsri.ac.id

---000---

BIODATA PENULIS

Ibnu Maja, S.Si., M.M.
Dosen Politeknik Negeri Sriwijaya

Penulis lahir di Palembang tanggal 05 April 1976. Saat ini penulis sebagai Dosen di Politeknik Negeri Siwijaya jurusan Teknik Elektro Program Studi Teknik Elektronika yang berada di Provinsi Sumatera Selatan.

Penulis memulai karier di Politeknik Negeri Sriwijaya dimulai pada tahun 2005 dengan penempatan pertama di Unit Pelayanan Mata Kuliah Umum (UP MPK) , hombase di Jurusan Teknik Elektro. Sebelum menjadi seorang dosen, Penulis mengajar di sekolah menengah atas sebagai guru honorer dan di bimbingan belajar. Penulis kemudian diangkat sebagai sekretaris UP. MPK dari tahun 2012 sampai dengan tahun 2020. Sekarang menjabat sebagai Koordiantor Mata Kuliah Umum di Pusat Pengembangan Pembelajaran dari tahun 2021 samapai dengan sekarang di Politeknik Negeri Sriwijaya.

---000---

BIODATA PENULIS

Tiku Tandiangnga, S.Si., M.Sc.
Dosen Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Cenderawasih

Penulis lahir di Sentani tanggal 15 April 1981. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Cenderawasih. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Matematika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika di Universitas Gadjah Mada, Yograkarta.

--- 000 ---

KALKULUS 1

Buku "Kalkulus 1" ini dirancang sebagai pengantar lengkap bagi mahasiswa atau pembelajar yang ingin memahami dasar-dasar kalkulus. Dengan materi yang terstruktur dan mudah dipahami, buku ini mencakup berbagai konsep penting yang menjadi landasan utama dalam studi kalkulus. Dimulai dengan penjelasan mengenai pengertian dan sejarah kalkulus, pembaca akan diajak mengenal dasar-dasar sistem bilangan riil, fungsi, grafik fungsi, serta operasi pada fungsi. Buku ini juga memberikan pembahasan mendalam tentang limit, kontinuitas, turunan, dan integral, yang disertai dengan contoh-contoh dan latihan untuk memperkuat pemahaman.

Selain itu, buku ini menjelaskan secara rinci teknik-teknik integrasi dan aplikasi kalkulus dalam berbagai konteks, termasuk penerapan dalam optimasi dan analisis grafik. Setiap bab disusun dengan alur yang logis, dimulai dari konsep paling dasar hingga penerapan yang lebih kompleks. Dilengkapi dengan ilustrasi, tabel, dan latihan, buku ini diharapkan dapat menjadi referensi yang bermanfaat, tidak hanya bagi mahasiswa, tetapi juga bagi siapa saja yang ingin memperdalam pengetahuan mereka dalam bidang kalkulus.Buku "Kalkulus 1" ini dirancang sebagai pengantar lengkap bagi mahasiswa atau pembelajar yang ingin memahami dasar-dasar kalkulus. Dengan materi yang terstruktur dan mudah dipahami, buku ini mencakup berbagai konsep penting yang menjadi landasan utama dalam studi kalkulus.

Dimulai dengan penjelasan mengenai pengertian dan sejarah kalkulus, pembaca akan diajak mengenal dasar-dasar sistem bilangan riil, fungsi, grafik fungsi, serta operasi pada fungsi. Buku ini juga memberikan pembahasan mendalam tentang limit, kontinuitas, turunan, dan integral, yang disertai dengan contoh-contoh dan latihan untuk memperkuat pemahaman.
Selain itu, buku ini menjelaskan secara rinci teknik-teknik integrasi dan aplikasi kalkulus dalam berbagai konteks, termasuk penerapan dalam optimasi dan analisis grafik. Setiap bab disusun dengan alur yang logis, dimulai dari konsep paling dasar hingga penerapan yang lebih kompleks. Dilengkapi dengan ilustrasi, tabel, dan latihan, buku ini diharapkan dapat menjadi referensi yang bermanfaat, tidak hanya bagi mahasiswa, tetapi juga bagi siapa saja yang ingin memperdalam pengetahuan mereka dalam bidang kalkulus.

LANGSUNG TERBIT

No.IKAPI: 052/SBA/2024
IKAPI

ISBN 978-623-10-4443-3
9 786231 044433

literasilangsungterbit@gmail.com
https://www.langsungterbit.com/
@literasilangsungterbit